

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Régulation de canaux par linéarisation et discrétisation des équations de Saint-Venant

KLEFFERT, Magali

Award date:
2011

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

**REGULATION DE CANAUX PAR LINEARISATION ET DISCRETISATION DES
EQUATIONS DE SAINT-VENANT**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « [Sciences Mathématiques à finalité spécialisée](#) »**

Magali KLEFFERT

Janvier 2011

Résumé

Ce mémoire traite, d'une part, des équations de Saint-Venant et d'autre part, de la stabilisation d'un système modélisé par ces équations. La première partie est consacrée à l'étude de ces équations. Les hypothèses nécessaires à leur obtention ainsi que les conditions aux bords associées y sont développées, de même que leur interprétation physique. La seconde partie se concentre sur le système modélisé par ces équations. Il s'agit d'un système non-linéaire aux dérivées partielles. La manière d'aborder sa stabilisation est le contrôle linéaire avec des méthodes d'asservissement d'état réel et estimé. Dans le but de pouvoir utiliser de tels contrôles, le système est approximé par un système linéaire de dimension finie obtenu par linéarisation autour d'un équilibre ainsi que par discrétisation spatiale. Des méthodes de contrôle sont appliquées pour différents types de conditions initiales.

Mots-clés : EDP de Saint-Venant, contrôle frontière, stabilisation, contrôle linéaire, asservissement d'état.

Abstract

The subject of this master thesis deals, on the one hand with the Saint-Venant equation, and on the other hand with the stabilization problem of open-channel hydraulic systems modeled by these equations. The first part is devoted to the study of these equations. The assumptions leading to these equations are developed, together with the corresponding boundary conditions, and their physical interpretation. The second part is concerned with the system modeled by these equations. The hydrodynamics of such a system are governed by these non linear partial differential equations. The stabilization problem is studied for such system by means of linear control with state feedback and estimated state feedback. In the purpose of using these controls, the system is approximated by a linear finite dimensional system obtained by linearization around a fixed equilibrium state and by spatial discretization. Control methods are applied to the system for different types of initial conditions.

Keywords : Saint-Venant equations, boundary control, stabilization, linear control, state feedback.

Table des matières

Introduction	4
1 Etude des équations de Saint-Venant	5
1.1 Hypothèses et notations	5
1.2 Equations	7
1.3 Origine des équations de Saint-Venant	8
1.3.1 L'équation de conservation de la masse	8
1.3.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement	10
1.4 Forme caractéristique des équations	12
1.5 Conditions initiales et frontières	16
2 Modélisation et description du système	18
2.1 Description du modèle physique	18
2.2 Description du système non linéaire	19
2.3 Linéarisation	21
2.4 Discrétisation spatiale	24
2.5 Mise en forme finale du système	26
3 Analyse d'un cas à conditions initiales uniformes	30
3.1 Choix des paramètres et des conditions	30
3.2 Description externe : la fonction de transfert	31
3.3 Stabilité interne et stabilité externe	32
3.4 Contrôlabilité et observabilité	33
3.5 Tests dynamiques en boucle ouverte	34
3.6 Réponse impulsionnelle et indicielle	41
3.7 Contrôle linéaire pour des conditions initiales uniformes . . .	43
3.7.1 Contrôle d'état par asservissement d'état	43
3.7.2 Contrôle dynamique par asservissement de l'état estimé	57
3.7.3 Comparaison entre état réel et état estimé	69
3.8 Influence du choix de n	73
4 Analyse d'un cas à conditions initiales non-uniformes	79
4.1 Choix des paramètres et des conditions	79
4.2 Stabilité interne et stabilité externe	80
4.3 Contrôlabilité et observabilité	81
4.4 Tests dynamiques en boucle ouverte	82
4.5 Réponse impulsionnelle et indicielle	86
4.6 Contrôle linéaire	87

4.6.1	Contrôle par asservissement d'état réel	87
4.6.2	Contrôle par compensation dynamique de l'état estimé	91
4.6.3	Comparaison entre état réel et état estimé	94
4.7	Influence du choix de n	98
Conclusion		99
Annexe		100
Bibliographie		111

Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions la régulation de la hauteur et du débit de l'eau dans les canaux. Plus précisément, il s'agit d'étudier la stabilisation d'un tel système. Pour ce faire, nous utiliserons un modèle d'équations aux dérivées partielles, appelées équations de Saint-Venant. Nous commencerons par étudier ces équations dans le cadre général de l'hydraulique. Ensuite, nous approximerons le modèle obtenu afin de nous ramener à un système linéaire de dimension finie. De ce fait, nous pourrons donc appliquer différentes méthodes de contrôle utilisées en contrôle linéaire telles que l'asservissement d'état réel ou l'asservissement d'état estimé. Une analyse complète de stabilité et l'application de ces méthodes seront effectuées dans le cadre d'un système particulier.

La première partie est basée sur [2] et concerne les équations de Saint-Venant. Nous allons commencer par établir ces équations, également appelées équations des eaux peu profondes. En effet, l'écoulement de l'eau dans les canaux (canaux d'irrigation ou rivières canalisées) peut être modélisé par des équations aux dérivées partielles non-linéaire obtenues par des lois physiques de conservation. Nous allons également effectuer une brève étude de ces équations étant donné l'importance qu'elles ont dans ce travail.

Dans la seconde partie, nous allons établir un modèle linéaire de ces équations. Pour ce faire, nous le linéariserons autour d'un état d'équilibre fixé grâce au développement de Taylor. Ensuite, nous nous ramènerons à un système de dimension finie par discrétisation spatiale grâce à la méthode des différences finies (méthode explicitée dans [3]). Cette discrétisation spatiale du modèle linéaire constitue la spécificité de ce mémoire. Nous pourrons ainsi analyser le modèle obtenu et concevoir des lois de contrôle visant à le stabiliser autour de l'équilibre choisi.

Dans la dernière partie, étalée sur deux chapitres, nous nous baserons sur deux cas particuliers que nous étudierons de manière approfondie. Des valeurs réelles seront données aux différents paramètres afin de pouvoir analyser numériquement le système. Celles-ci ont été recueillies dans les articles [1], [4] et [5]. Le premier cas choisi possède des conditions initiales uniformes, c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes en chaque point du canal étudié, tandis que le deuxième cas est celui de conditions initiales non-uniformes, c'est-à-dire différentes en chaque point du canal. Nous allons ainsi concevoir des contrôles afin de stabiliser ces systèmes autour de leur état d'équilibre.

1 Etude des équations de Saint-Venant

Avant d'essayer de contrôler un système physique, il nous faut mieux le connaître afin d'en faire une bonne modélisation. Le modèle de systèmes de canaux à surface libre est le plus souvent formulé par les équations de Saint-Venant qui découlent des principes de la mécanique des fluides.

Dans ce chapitre, nous allons établir puis étudier ces équations. Celles-ci modélisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un écoulement d'eau dans un canal à surface libre. Etant donné l'importance de ces équations dans la suite de ce mémoire, il paraît utile de leur consacrer un chapitre afin de mieux les comprendre. L'étude effectuée est basée sur le chapitre 2 du livre [2].

1.1 Hypothèses et notations

Il existe deux sortes de canaux à surface libre : les canaux naturels et les canaux artificiels. Les premiers sont par exemple des fleuves, des rivières ou encore des ruisseaux. Leurs géométries ainsi que leurs caractéristiques hydrauliques sont variables. Tandis que les seconds ont été construits par l'homme dans des buts précis : l'irrigation, le drainage ou la navigation.

Différents éléments interviennent dans la géométrie d'un canal : la hauteur (H), la largeur (B), la section mouillée (A), le périmètre mouillé (P), le rayon hydraulique (R défini comme $R = A/P$), la longueur de la portion de canal considérée (L) et la pente de fond (I). Un autre élément important est la rugosité des parois, qui diffère pour chaque matériau. Dans notre cas, elle sera prise en compte via le coefficient de Manning-Strickler.

Notons par x la variable longitudinale, orientée dans le sens de l'écoulement, et par t le temps.

Grâce à ces notations, nous pouvons considérer les variables suivantes :

- $A(x, t)$ l'aire de la section traversée (m^2),
- $Q(x, t)$ le débit à travers la section A (m^3/s),
- $V(x, t)$ la vitesse moyenne dans la section A (m/s),
- $H(x, t)$ le niveau d'eau (càd la profondeur de l'eau) (m),
- I la pente de fond (m/m),
- g l'accélération gravitationnelle (m/s^2).

$Q(x, t)$ est défini par la relation suivante : $Q(x, t) = A(x, t)V(x, t)$.
 $A(x, t)$ est défini par $A(x, t) = B(x, t)H(x, t)$.

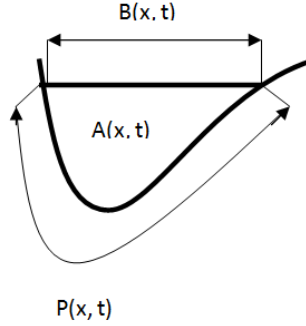


FIGURE 1 – Section transversale d'un canal ouvert

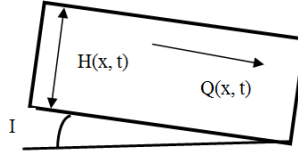


FIGURE 2 – Section longitudinale d'un canal ouvert

Commençons par poser les hypothèses simplificatrices nécessaires à l'obtention des équations :

- 1) L'écoulement est de dimension 1 c'est-à-dire que la hauteur et le débit ne dépendent que de la coordonnée spatiale x et du temps t .
- 2) Les accélérations verticales et transversales dues à l'écoulement sont négligeables, la pression est donc hydrostatique c'est-à-dire qu'on considère que l'eau est au repos.
- 3) Les forces de frottement aux frontières et la turbulence peuvent être représentées par des lois de résistance analogues à celles utilisées pour un écoulement à état constant. Nous pourrions donc utiliser la formule de Manning-Strickler :

$$J(H, A) = \frac{Q^2}{K^2 A^2 \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

où K est le coefficient de Strickler qui exprime la rugosité des parois. Notons que nous pouvons utiliser le coefficient de Manning n de manière analogue puisqu'il est défini comme suit : $n = \frac{1}{K}$.

4) La pente de fond I est faible.

5) La largeur du canal le long de x vaut 1, c'est-à-dire que l'on considère que $B(x, t) = 1 \forall x \in [0, L]$ et donc nous aurons que $A(x, t) = H(x, t)$.

6) Le canal est supposé de la forme d'un prisme de section rectangulaire constante.

1.2 Equations

Les équations de Saint-Venant sont deux équations non-linéaires aux dérivées partielles hyperboliques du premier ordre. Elles sont exprimées par rapport aux variables de débit et de section mouillée, dépendantes de la position et du temps.

La première est l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = c, \quad (1)$$

où c représente le débit latéral (évaporation, infiltration) par unité de longueur (m^3/s) qui est positif pour un approt et négatif pour une perte.

La deuxième est l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2(x, t)}{A(x, t)} \right] + gA(x, t) \left(\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} + J(H(x, t), Q(x, t)) - I \right) = 0. \quad (2)$$

La pente de frottement est donnée par la formule de Manning classique :

$$J(A(x, t), Q(x, t)) = \frac{Q(x, t)^2 n^2}{A(x, t)^2 R(x, t)^{4/3}}, \quad (3)$$

où n est le coefficient de Manning ($\text{sm}^{-1/3}$) et R est le rayon hydraulique défini par $R = A/P$ où P est le périmètre mouillé. Grâce aux hypothèses simplificatrices posées, nous pouvons réécrire les égalités suivantes :

- $P(x, t) = B(x, t) + 2H(x, t) = 1 + 2H(x, t)$,

- $R(x, t) = \frac{A(x, t)}{P(x, t)} = \frac{H(x, t)}{1 + 2H(x, t)}$,

- et finalement : $J(A(x, t), Q(x, t)) = \frac{Q(x, t)^2 n^2}{A(x, t)^2 \left(\frac{H(x, t)}{1 + 2H(x, t)} \right)^{4/3}}$.

Il est important de remarquer que ces équations ne sont valables que lorsque les hypothèses posées sont vérifiées.

1.3 Origine des équations de Saint-Venant

Nous allons à présent établir ces équations à partir des principes physiques de base. Notons $m(x, t)$ la masse par unité de longueur du canal et définissons-la par $m(x, t) = \rho A(x, t)$ où ρ est la densité de l'eau.

Supposons que les variables sont continues et différentiables car ainsi leur dérivées partielles suivant x et t existent et sont continues.

Définissons un volume de contrôle, noté Ω , qui correspond à un volume arbitraire d'eau dans le canal entouré par une surface imaginaire. On le choisit comme un morceau du canal de longueur Δx . La masse d'eau à l'intérieur de ce volume au temps t sera notée $M(t)$.

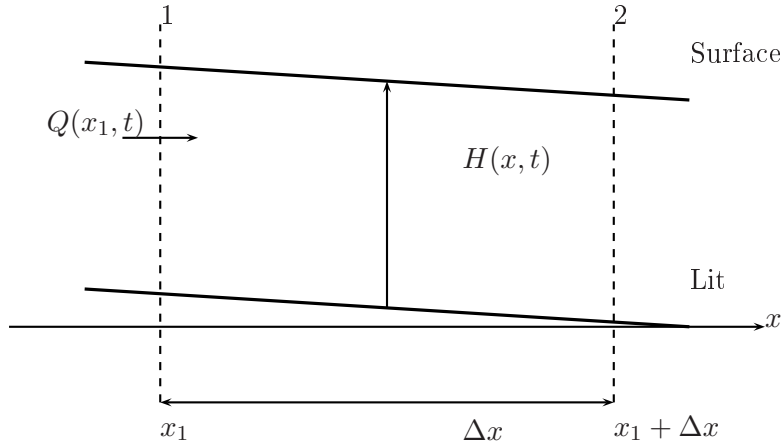


FIGURE 3 – Vue longitudinale d'une très petite partie du canal

1.3.1 L'équation de conservation de la masse

Regardons pour commencer la variation de la masse dans notre volume de contrôle Ω . La masse totale à l'intérieur de ce volume augmente ou diminue selon la quantité d'eau qui traverse les sections 1 et 2. Nous savons aussi que l'écoulement à travers une section située en x au temps t est donné par $Q(x, t)$. Nous avons donc que l'écoulement à travers la section 1 ($x = x_1$)

vaut $Q(x_1, t)$ et l'écoulement à travers la section 2 ($x = x_1 + \Delta x$) vaut $Q(x_1 + \Delta x, t)$. On peut donc écrire :

$$M(t + \Delta t) - M(t) = \rho \int_t^{t+\Delta t} [Q(x_1, \tau) - Q(x_1 + \Delta x, \tau)] d\tau.$$

En utilisant le théorème de la valeur intermédiaire, nous avons l'existence d'un $\eta \in (0, 1)$ qui est tel que

$$M(t + \Delta t) - M(t) = \rho [Q(x_1, t + \eta\Delta t) - Q(x_1 + \Delta x, t + \eta\Delta t)] \Delta t. \quad (4)$$

Donc, nous pouvons donc évaluer la masse totale d'eau à l'intérieur du volume de contrôle comme l'intégrale de la masse par unité de longueur :

$$M(t) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} m(x, t) dx = \rho \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} A(x, t) dx.$$

En utilisant une fois de plus le théorème de la valeur intermédiaire, nous avons l'existence d'un $\eta' \in (0, 1)$ tel que :

$$M(t + \Delta t) - M(t) = \rho [A(x_1 + \eta'\Delta x, t + \Delta t) - A(x_1 + \eta'\Delta x, t)] \Delta x. \quad (5)$$

Egalons les équations (4) et (5) et divisons-les par Δx et Δt :

$$\frac{[A(x_1 + \eta'\Delta x, t + \Delta t) - A(x_1 + \eta'\Delta x, t)]}{\Delta t} = \frac{Q(x_1, t + \eta\Delta t) - Q(x_1 + \Delta x, t + \eta\Delta t)}{\Delta x} \quad (6)$$

A présent il suffit de prendre la limite lorsque Δx et Δt tendent vers 0 pour conclure. En effet, par hypothèse $A(x, t)$ et $Q(x, t)$ sont continuellement différentiables. Nous avons donc pour le membre de gauche de (6)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x_1 + \eta'\Delta x, t + \Delta t) - A(x_1 + \eta'\Delta x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial A(x_1 + \eta'\Delta x, t)}{\partial t},$$

et par la continuité de ses dérivées partielles par rapport au premier argument

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial A(x_1 + \eta'\Delta x, t)}{\partial t} = \frac{\partial A(x_1, t)}{\partial t}.$$

En appliquant le même raisonnement au membre de droite de (6), nous pouvons conclure que

$$\frac{\partial A(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0.$$

De plus, sous l'hypothèse que la largeur du canal vaut 1, nous pouvons écrire $A(x, t) = H(x, t)$ et donc

$$\frac{\partial H(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0.$$

1.3.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement

Rapellons que la quantité de mouvement est une grandeur physique liée à la vitesse et à la masse d'un objet. Notons-la p . Elle est définie comme suit

$$p = mv$$

où m représente la masse de l'objet et v la vitesse.

Nous pouvons définir la variation de la quantité de mouvement pendant un laps de temps Δt comme la somme des forces agissant sur notre objet.

$$F = ma = \frac{(mv_f - mv_i)}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

où F est la somme des forces, v_i la vitesse initiale de l'objet, v_f la vitesse finale et Δt est le temps au cours duquel la vitesse change.

Cependant nous travaillons dans un cadre précis, celui des fluides. Il est donc plus aisé de parlé en terme de densité r (kg/m³) et de débit Q (m³/s). La mutliplication de la densité et du débit nous donne la masse traversant une certaine section durant un temps Δt . Nous pouvons donc remplacer $\frac{m}{\Delta t}$ par rQ :

$$F = rQ(v_f - v_i).$$

Nous voulons la conservation de la quantité de mouvement dans la direction x . Pour cela considérons notre portion de canal de longueur Δx qui représente notre volume de contrôle. Afin d'avoir la conservation de la quantité de mouvement, il faut donc que la variation de quantité de mouvement (au cours du laps de temps Δt) soit égale à la somme de l'intégrale des forces extérieures agissant sur ce volume et de la quantité de mouvement du flux entrant dans le volume de contrôle. Ecrivons d'abord la quantité de mouvement d'un flux entrant dans la section considérée (notons-la $p_{entrant}$) ainsi que la quantité de mouvement d'un flux sortant de cette section (notons-la $p_{sortant}$).

$$p_{entrant} = mv = rQv = r \frac{Q^2}{A}$$
$$p_{sortant} = p_{entrant} + \frac{\partial p_{entrant}}{\partial x} \Delta x$$

Et donc, la variation de quantité de mouvement s'écrira :

$$\frac{\partial rQ}{\partial t} = r \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Regardons à présent au niveau des forces extérieures qui agissent sur notre volume de contrôle. Nous supposons qu'il y a 3 forces agissantes sur notre volume dans la direction x : la gravité, la pression et les frottements.

L'expression de la force de gravité est la suivante :

$$grA\Delta x \sin(\phi) = grA\Delta x I$$

où ϕ est l'angle de la pente. Il est suffisamment petit que pour poser $\sin \phi = \tan \phi = S_0$.

Passons à l'expression des frottements :

$$grA\Delta x J$$

Enfin, voyons l'expression de la variation de pression :

$$grA\Delta x \frac{\partial h}{\partial x}$$

où h est la profondeur du canal à l'endroit considéré.

Cette expression est obtenue de la manière suivante. La pression hydrostatique peut être calculée par la formule $P = rg(h - y)$ avec $y \leq h$, y étant la coordonnée verticale. Afin d'obtenir la force totale due à la pression, nous intégrons la formule sur toute la hauteur du canal :

$$F_P = r \int_0^h g(h - y)B(y)dy$$

où $B(y)$ est la largeur de la section traversée en y . Si nous considérons une section traversée rectangulaire de largeur B_B , nous obtenons par résolution de l'intégrale :

$$F_P = \frac{1}{2}rgB_B h^2.$$

Et donc la variation de pression le long du canal s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial F_P}{\partial x} \Delta x = rgB_B h \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} = grA\Delta x \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Nous pouvons à présent obtenir la formule de conservation de la quantité de mouvement :

$$r \frac{\partial Q}{\partial t} + r \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} = -rgA \frac{\partial h}{\partial x} + rgA(I - J)$$

1.4 Forme caractéristique des équations

Les équations de Saint-Venant sont des équations différentielles non linéaires et hyperboliques. Nous pouvons les exprimer comme un système de 4 équations différentielles ordinaires dans le plan (x, t) en utilisant la forme caractéristique. Dans ce plan, les équations sont satisfaites le long de "courbes caractéristiques". La forme caractéristique est importante car elle permet de mieux comprendre les phénomènes physiques modélisés par ces équations hyperboliques.

Pour commencer, rappelons que, grâce à nos hypothèses, nous avons que l'aire $A(x, t) = B(x, t)H(x, t)$ devient $A(x, t) = H(x, t)$ puisque le canal est supposé de forme prismatique rectangulaire et de largeur unité.

Reprenons la première équation, celle de conservation de la masse :

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Par les relations suivantes :

$$A(x, t) = H(x, t) \text{ et } Q(x, t) = A(x, t)V(x, t)$$

on peut réécrire l'équation comme suit :

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + H(x, t)\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + V(x, t)\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Prenons à présent la deuxième équation, celle de conservation du moment :

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2(x, t)}{A(x, t)} \right] + gA(x, t) \left(\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} + J - I \right) = 0.$$

Commençons par remplacer $Q(x, t)$ par $H(x, t)V(x, t)$ et $A(x, t)$ par $H(x, t)$:

$$H\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(HV)^2}{H} \right] + gH \left(\frac{\partial H}{\partial x} + J - I \right) = 0$$

Simplifions :

$$H\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [HV^2] + gH \left(\frac{\partial H}{\partial x} + J - I \right) = 0$$

Nous avons, par l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial H}{\partial x}.$$

De plus, en développant le terme $\frac{\partial HV^2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial HV^2}{\partial x} = H \frac{\partial V^2}{\partial x} + V^2 \frac{\partial H}{\partial x}$$

et en divisant le tout par H , nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + g \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = g(I - J). \quad (8)$$

Introduisons à présent une variable $C(x, t)$ définie comme suit :

$$C(x, t) = \sqrt{gH(x, t)}.$$

Sa dérivée partielle par rapport au temps est

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{g}{2C} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Nous pouvons donc réécrire nos deux équations :

$$2 \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial V}{\partial x} + 2V \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2C \frac{\partial C}{\partial x} = g(I - J) \quad (10)$$

Si l'on additionne et si l'on soustrait (9) et (10), nous obtenons respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(V + 2C) + (V + C) \frac{\partial}{\partial x}(V + 2C) = g(I - J), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(V - 2C) + (V - C) \frac{\partial}{\partial x}(V - 2C) = g(I - J). \quad (12)$$

Ainsi, nous avons un nouveau système d'équations avec 2 nouvelles variables :

$$J_1(x, t) = V(x, t) + 2C(x, t)$$

$$J_2(x, t) = V(x, t) - 2C(x, t).$$

Plaçons-nous à présent dans le plan (x, t) . Dans ce plan, les courbes caractéristiques sont définies par une équation différentielle ordinaire qui vérifie :

$$\frac{dx}{dt} = U(x(t), t). \quad (13)$$

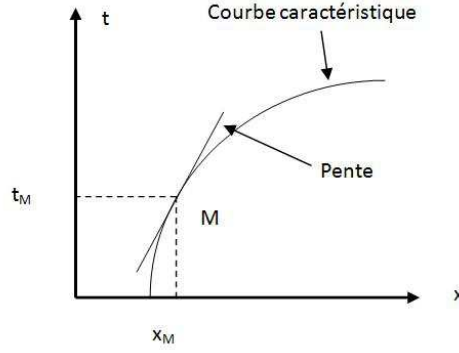


FIGURE 4 – Ligne caractéristique $\frac{dx}{dt} = U(x(t), t)$ dans le plan (x, t)

Le membre de gauche du système d'équations (11) implique donc une dérivée le long de deux courbes caractéristiques.

Pour nous en convaincre, regardons la figure (4), où une courbe définie par (13) possède une pente en (x_M, t_M) qui vaut $\frac{1}{U(x_M, t_M)}$.

Regardons l'expression de la dérivée par rapport au temps d'une variable $Z(x(t), t)$ le long d'une courbe caractéristique :

$$\frac{dZ}{dt}(x(t), t) = \frac{\partial Z}{\partial t}(x(t), t) + U(x(t), t) \frac{\partial Z}{\partial x}(x(t), t). \quad (14)$$

Appliquons à présent cette propriété au système (9) :

$$\frac{dJ_1}{dt}(x_1, t) = g(I - J(x_1, J_1(x_1, t), J_2(x_1, t))) \quad (15)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = V(x_1, t) + C(x_1, t) \quad (16)$$

$$\frac{dJ_2}{dt}(x_2, t) = G(I - J(x_2, J_1(x_2, t), J_2(x_2, t))) \quad (17)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = V(x_2, t) - C(x_2, t) \quad (18)$$

La dépendance de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en t a été omise afin d'avoir une meilleure lisibilité.

Ces 4 équations différentielles ordinaires sont équivalentes aux équations de Saint-Venant. En général, ces équations n'ont pas de solution analytique

mais la forme caractéristique peut être utilisée pour résoudre les équations numériquement.

Rappelons aussi que cette forme est valide grâce aux hypothèses posée au départ c'est-à-dire pour un canal prismatique de section rectangulaire. Le sens physique de ces équations peut être décrit comme suit : il s'agit de l'interaction entre deux vagues dans le plan (x, t) , la première voyageant à une vitesse $V + C$ l'autre à une vitesse $V - C$.

Cette forme caractéristique nous permet de mieux comprendre le comportement physique d'un canal. Le débit et la profondeur (de manière équivalente nous pouvons considérer la vitesse et l'aire) sont le résultat de l'interaction entre deux vagues élémentaires. La première voyage en aval (elle correspond à la courbe caractéristique positive C_1) tandis que la deuxième peut voyager en aval ou en amont (elle correspond à la courbe caractéristique négative C_2). Le sens de trajet de cette dernière dépend du signe de V_C : si $V < C$, C_2 voyagera en amont et le flux sera nommé sous-critique, tandis que si $V > C$ C_2 voyagera en aval et le flux sera nommé sur-critique.

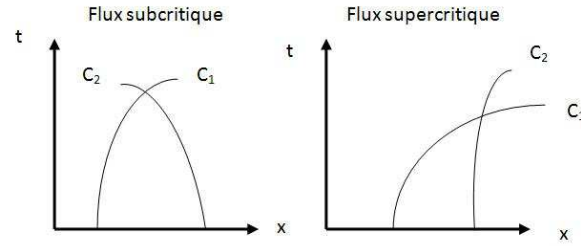


FIGURE 5 – Courbes caractéristiques pour des flux sous-critique et sur-critique

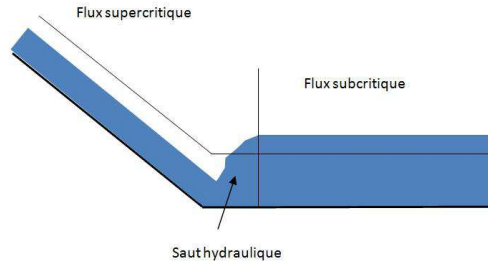


FIGURE 6 – Un exemple physique de flux sous-critique et sur-critique

1.5 Conditions initiales et frontières

Les conditions initiales sont données par $(Q(x, 0), H(x, 0))$ pour tout $x \in [0, L]$ où L est la longueur du canal. Le choix des conditions frontières dépend des caractéristiques de l'écoulement.

Grâce aux équations caractéristiques, nous avons vu qu'il existait deux types de flux : sous-critique et sur-critique. Il est donc possible de définir différentes conditions frontières suivant le type de flux considéré.

Dans le cas d'un flux sous-critique, nous aurons besoin de 2 conditions frontières l'une en amont et l'autre en aval.

Dans le cas d'un flux sur-critique, nous aurons besoin de 2 conditions frontières toutes deux définies à la frontière située en amont.

Il existe cependant des situations intermédiaires lorsque le flux est en partie sous-critique et en partie sur-critique. Dans ce cas, le nombre de conditions frontières à déterminer est variable (une, deux ou même trois peuvent être nécessaires). Nous n'aborderons pas ces situations ici. Nous allons nous limiter au cas d'un flux sous-critique pour le reste de ce mémoire.

Regardons à présent sous quelle forme se présentent les conditions frontières. Nous pouvons choisir la profondeur ou le débit comme conditions frontières. Puisque deux conditions frontières sont nécessaires, nous avons 4 possibilités :

1. Le débit à chaque frontière : $(Q(0, t), Q(L, t))$. La situation physique correspondante est une portion de canal comprise entre deux pompes. Celles-ci contrôlent les débits à chaque frontière.
2. La profondeur de l'eau à chaque frontière : $(H(0, t), H(L, t))$. Physique-

ment, il s'agit d'une situation où le canal considéré relie deux étendues d'eau (par exemple, une rivière reliant un lac et la mer).

3. Le débit en amont et la profondeur en aval : ($Q(0,t)$, $H(L,t)$). Un exemple qui illustre ces conditions est une rivière contrôlée en amont par un barrage qui régule le débit et qui abouti dans un lac.

4. La profondeur en amont et le débit en aval : ($H(0,t)$, $Q(L,t)$). C'est un cas inhabituel qui peut correspondre à une centrale hydroélectrique placée en aval qui contrôle le débit d'une rivière dont la source se trouve dans un lac en amont.

Néanmoins d'autres situations physiques peuvent correspondre. Par exemple, une portion de canal comprise entre deux ouvrages (vannes noyées, déversoirs, stations de pompage) qui permettent de contrôler la hauteur d'eau ou le débit à ces deux extrémités.

2 Modélisation et description du système

Dans le chapitre précédent, nous avons établi et analysé les équations de Saint-Venant. Celles-ci vont nous permettre de modéliser le système physique. Le but de cette section est d'obtenir un modèle linéaire du système afin de pouvoir appliquer des techniques de contrôle utilisées en contrôle de systèmes linéaires. Nous voulons donc un système qui soit de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (19)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (20)$$

$$x(0) = x_0 \quad (21)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée du système et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la fonction de lecture de sortie. Notons que les matrices A , B , C et D seront respectivement de dimension $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$.

Les équations de Saint-Venant étant des équations non linéaires aux dérivées partielles, il va donc falloir les linéariser dans un premier temps. Ensuite, il nous faudra effectuer une discrétisation spatiale afin d'obtenir la forme voulue.

2.1 Description du modèle physique

Rappelons tout d'abord le système physique étudié ainsi que les hypothèses posées dans le chapitre précédent. Nous étudions une portion d'un canal d'irrigation qui est comprise entre deux ouvrages. Les trois hypothèses principales qui ont été posées sont :

- 1) le canal est de pente faible notée I ,
- 2) le canal est de la forme d'un prisme de section rectangulaire constante et une largeur unité,
- 3) le canal est soumis à des approvisionnements ou enlèvements d'eau invariants dans le temps et dans l'espace qui ne modifient pas la conservation de la quantité de mouvement.

2.2 Description du système non linéaire

Pour commencer, nous allons établir le modèle non linéaire à partir duquel nous allons obtenir le modèle linéaire souhaité.

Rappelons les équations de Saint-Venant qui sont à la base de notre modèle. La première est une loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = c$$

et la seconde une loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2(x,t)}{H(x,t)} + \frac{gH^2(x,t)}{2} \right) = gH(x,t)(I - J(H, Q))$$

où $J(H, Q) = \frac{Q(x,t)^2}{K^2 H(x,t)^2 \left(\frac{H(x,t)}{1+2H(x,t)} \right)^{\frac{3}{4}}}$.

Les variables d'état sont le niveau d'eau $H(x,t)$ et le débit de l'eau $Q(x,t)$. On aura donc un vecteur d'état de la forme $Y = \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix}$.

Les paramètres sont g la constante de gravitation, K le coefficient de Strickler et c la constante d'approvisionnements/enlèvements d'eau le long du canal.

Les deux équations précédentes peuvent être mises sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + A(H, Q) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ gH(x,t)(I - J(H, Q)) \end{pmatrix}$$

où la matrice $A(H, Q)$ est définie par

$$A(H, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH - \frac{Q^2}{H^2} & \frac{2Q}{H} \end{pmatrix}.$$

Regardons les valeurs propres de la matrice $A(H, Q)$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -gH + \frac{Q^2}{H^2} & \lambda - \frac{2Q}{H} \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda \left(\lambda - \frac{2Q}{H} \right) + \frac{Q^2}{H^2} - gH &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda \frac{2Q}{H} + \frac{Q^2}{H^2} - gH &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $\Delta = \left(-2\frac{Q}{H}\right) - 4\left(\frac{Q^2}{H^2} - gH\right) = 4gH$.

Les valeurs propres (nommons les c_1 et c_2) sont donc :

$$\begin{aligned} c_1(H, Q) &= \frac{Q}{H} - \sqrt{gH} \\ c_2(H, Q) &= \frac{Q}{H} + \sqrt{gH}. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont appelées les vitesses caractéristiques. Le courant est dit fluvial lorsque ces deux vitesses ont des signes opposés :

$$c_1(H, Q) < 0 < c_2(H, Q).$$

Une généralisation est bien sur possible afin d'étendre l'analyse à plusieurs types de canaux. En effet, nous pouvons voir ceux-ci comme formés d'un ensemble de dispositifs de transport d'eau à une dimension qui seraient connectés entre eux. Nous pouvons donc représenter la dynamique de tels canaux par un ensemble de sous-systèmes. Chacun de ces sous-systèmes sont soumis au lois de Saint Venant.

$$\partial_t \begin{pmatrix} H_i \\ Q_i \end{pmatrix} + A_i(H_i, Q_i) \partial_x \begin{pmatrix} H_i \\ Q_i \end{pmatrix} = f_i(H_i, Q_i) \quad i = 1, \dots, m. \quad (22)$$

Nous pouvons donc travailler avec un vecteur d'état de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ Q_1 \\ H_2 \\ Q_2 \\ \vdots \\ H_{m-1} \\ Q_{m-1} \\ H_m \\ Q_m \end{pmatrix}.$$

De même, la matrice $A(Y)$ sera de la forme

$$A(Y) = \text{diag}(A_i(Y_i)).$$

2.3 Linéarisation

Le but de cette sous-section est de linéariser le modèle précédent. Il nous faut tout d'abord un état d'équilibre autour duquel nous pourrions linéariser. Pour l'instant, posons cet état comme étant $(H_0(x), Q_0(x))$. Plus loin dans ce travail, nous chercherons les conditions pour avoir un tel équilibre. Afin de linéariser nos équations, posons

$$\begin{aligned} h(x, t) &= H(x, t) - H_0(x) \\ q(x, t) &= Q(x, t) - Q_0(x), \end{aligned}$$

où les termes q et h sont les variables linéaires.

Reprenons notre système sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{H} + \frac{1}{2}gH^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gH(x, t)(I - J(H, Q)) \end{pmatrix}^c \quad (23)$$

Les conditions frontières accompagnant ce système sont données par $Q(0, t) = w_1(t)$ et $Q(L, t) = w_2(t)$ (par exemple, puisque l'on peut choisir la combinaison de conditions frontières que nous voulons suivant le système physique modélisé).

Afin de faciliter les prochains développements, posons

$$Y(x, t) = \begin{pmatrix} H(x, t) \\ Q(x, t) \end{pmatrix}.$$

De même, nous noterons :

$$y(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ q(x, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_0(x) = \begin{pmatrix} H_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix}.$$

Posons également $G(H, Q) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{H} + \frac{1}{2}gH^2 \end{pmatrix}$ et $F(H, Q) = \begin{pmatrix} gH(x, t)(I - J(H, Q)) \end{pmatrix}^c$.

Nous pouvons donc écrire notre système (23) :

$$\frac{\partial}{\partial t} Y + \frac{\partial}{\partial x} G(Y) = F(Y). \quad (24)$$

Développons ce système autour de l'état d'équilibre par un développement

de Taylor d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Y + \frac{\partial}{\partial x} \left(G(Y_0) + \frac{\partial G(Y_0)}{\partial Y}(Y - Y_0) + O((Y - Y_0)^2) \right) \\ = F(Y_0) + \frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y}(Y - Y_0) + O((Y - Y_0)^2)\end{aligned}$$

où nous négligeons les termes d'ordre supérieur à 1.

Remarquons que $y = Y - Y_0$.

Notre système à l'équilibre vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_0 = 0 = -\frac{\partial}{\partial x}G(Y_0) + F(Y_0).$$

Nous avons donc le système linéarisé obtenu de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}y &= \frac{\partial}{\partial t}(Y - Y_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Y - \frac{\partial}{\partial t}Y_0 \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}G(Y_0) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(Y_0)}{\partial Y}y\right) + F(Y_0) + \frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y}y \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}G(Y_0) - F(Y_0) \\ &= -\frac{\partial G(Y_0)}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y}y\end{aligned}$$

Calculons à présent les termes $\frac{\partial G(Y_0)}{\partial Y}$ et $\frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(Y_0)}{\partial Y} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH_0 - \frac{Q_0^2}{H_0^2} & \frac{2Q_0}{H_0} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(I + J_0 - \frac{4J_0}{3R_0H_0}) & -2gH_0\frac{J_0}{Q_0} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où $J_0 = \frac{Q_0^2}{K^2H_0^2}$ et $R_0 = \frac{H_0}{1+2H_0}$.

Et finalement notre système linéaire est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH_0 - \frac{Q_0^2}{H_0^2} & \frac{2Q_0}{H_0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(I + J_0 - \frac{4J_0}{3R_0H_0}) & -2gH_0\frac{J_0}{Q_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \quad (25)$$

avec des conditions frontières données par $Q(0, t) = w_1(t)$ et $Q(L, t) = w_2(t)$.

Recherche de l'équilibre ($H_0(x), Q_0(x)$)

Les conditions d'équilibre sont obtenues en posant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(x,t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}Q(x,t) &= 0.\end{aligned}$$

Les solutions des équations différentielles suivantes seront nos points d'équilibre :

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(x) = 0 \quad (26)$$

$$-\frac{Q_0(x)^2}{H_0(x)^2} \frac{\partial H_0(x)}{\partial x} + gH_0(x) \left(\frac{\partial H_0(x)}{\partial x} - I + J(H_0(x), Q_0(x)) \right) = 0 \quad (27)$$

Nous pouvons donc voir qu'à l'équilibre le débit est constant quel que soit la position x : $Q_0(x) = Q_0, \forall x$. La hauteur d'équilibre est, elle, obtenue par la résolution de l'équation différentielle suivante : $\frac{dH_0(x)}{dx} \left(gH_0(x) - \frac{Q_0^2}{H_0(x)^2} \right) + gH_0(x) (J(H_0(x), Q_0) - I) = 0$. Cette équation est résolue par intégration à partir d'une des conditions de hauteur fixée à une des deux extrémités. De cette manière, il existe trois profils possibles : un à hauteur uniforme, un avec réserve d'eau et un avec assèchement d'eau en aval.

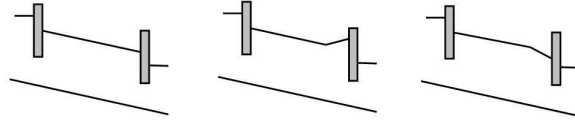


FIGURE 7 – Les 3 profils possibles : uniforme - réserve d'eau - assèchement en aval

Le profil de hauteur uniforme correspond à la condition $\frac{dH_0(x)}{dx} = 0$. En la couplant avec l'équation différentielle précédente, nous obtenons la condition : $J(H_0(x), Q_0) = I$. Cela nous montre que nous aurons un profil à hauteur uniforme que si les frottements compensent exactement l'effet de la pente. Il y a donc une condition sur le débit d'équilibre et le tirant d'eau. Ceux-ci ne peuvent pas être choisis arbitrairement. Les deux autres profils apparaissent dans les cas où la pente et les frottements ne se compensent pas exactement.

2.4 Discrétisation spatiale

Nous allons à présent discrétiser notre système (25). Pour cela, considérons notre canal sur la portion $[0, L]$. Nous allons diviser cette portion en n intervalles réguliers en supposant connus la valeur de $H(x, t)$ et $Q(x, t)$ en chaque point de discrétisation. Notons x_i chacun de ces points. Nous aurons donc que $x_1 = 0$ et $x_n = L$. Nous noterons le pas de discrétisation Δ .

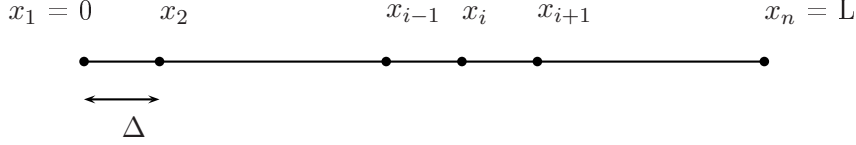


FIGURE 8 – Discrétisation spatiale

Par cette discrétisation les fonctions $H(x, t)$ et $Q(x, t)$ pourront être mis sous la forme de vecteurs qui ne dépendront plus que du temps :

$$H_d(t) = \begin{pmatrix} H(x_1, t) \\ H(x_2, t) \\ \vdots \\ H(x_n, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$Q_d(t) = \begin{pmatrix} Q(x_1, t) \\ Q(x_2, t) \\ \vdots \\ Q(x_n, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

et nous aurons donc un vecteur d'état de la forme suivante :

$$Q_d(t) = \begin{pmatrix} H_d(t) \\ Q_d(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Reprenons le système (25) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH_0 - \frac{Q_0^2}{H_0^2} & \frac{2Q_0}{H_0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(I + J_0 - \frac{4J_0}{3R_0H_0}) & -2gH_0\frac{J_0}{Q_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$ discrétisé va donc devenir un vecteur de la forme :

$$\begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(x_1, t) - H_0(t) \\ H(x_2, t) - H_0(t) \\ \vdots \\ H(x_n, t) - H_0(t) \\ Q(x_1, t) - Q_0(t) \\ Q(x_2, t) - Q_0(t) \\ \vdots \\ Q(x_n, t) - Q_0(t) \end{pmatrix}.$$

Grâce à cette discrétisation, nous pouvons désormais approximer $\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$ par la méthode des différences finies. Rappelons brièvement cette méthode provenant de [3]. La méthode des différences finies permet de résoudre de manière numérique des équations différentielles. En effet, elle permet d'approximer une dérivée par les valeurs numériques de la fonction aux points arrière, actuel et suivant. Il existe 3 différences nous donnant la dérivée première en un point x_i avec une erreur de l'ordre de Δ :

- la différence en avant : $\frac{\partial}{\partial x} h(x_i, t) \simeq \frac{h(x_{i+1}, t) - h(x_i, t)}{\Delta}$,
- la différence en arrière : $\frac{\partial}{\partial x} h(x_i, t) \simeq \frac{h(x_i, t) - h(x_{i-1}, t)}{\Delta}$,
- et la différence centrée : $\frac{\partial}{\partial x} h(x_i, t) \simeq \frac{h(x_{i+1}, t) - h(x_{i-1}, t)}{2\Delta}$.

La dérivée en x_1 sera approximée par une différence en avant, celle en x_n par une différence en arrière et les autres par une différence centrée.

Ecrivons à présent l'expression de $\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$ par cette méthode :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h(x_1, t) \\ h(x_2, t) \\ \vdots \\ h(x_{n-1}, t) \\ h(x_n, t) \\ q(x_1, t) \\ q(x_2, t) \\ \vdots \\ q(x_{n-1}, t) \\ q(x_n, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h(x_2, t) - h(x_1, t)}{\Delta} \\ \frac{h(x_3, t) - h(x_1, t)}{2\Delta} \\ \vdots \\ \frac{h(x_n, t) - h(x_{n-2}, t)}{2\Delta} \\ \frac{h(x_n, t) - h(x_{n-1}, t)}{\Delta} \\ \frac{q(x_2, t) - q(x_1, t)}{\Delta} \\ \frac{q(x_3, t) - q(x_1, t)}{2\Delta} \\ \vdots \\ \frac{q(x_n, t) - q(x_{n-2}, t)}{2\Delta} \\ \frac{q(x_n, t) - q(x_{n-1}, t)}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(x_1, t) \\ h(x_2, t) \\ \vdots \\ h(x_{n-1}, t) \\ h(x_n, t) \\ q(x_1, t) \\ q(x_2, t) \\ \vdots \\ q(x_{n-1}, t) \\ q(x_n, t) \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc exprimer $\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix},$$

avec la matrice $T = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

2.5 Mise en forme finale du système

Dans les sous-sections précédentes, nous avons d'abord linéariser le système pour ensuite le discrétiser spatialement. Nous allons à présent reprendre le système (25)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH_0 - \frac{Q_0^2}{H_0^2} & \frac{2Q_0}{H_0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(I + J_0 - \frac{4J_0}{3R_0H_0}) & -2gH_0 \frac{J_0}{Q_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$$

avec des conditions frontières données par $Q(0, t) = u_1(t)$ et $Q(L, t) = u_2(t)$.

Par la discrétisation spatiale, nous avons obtenu que

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix}$$

ainsi qu'une nouvelle écriture pour notre vecteur $\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(x_1, t) - H_0(t) \\ H(x_2, t) - H_0(t) \\ \vdots \\ H(x_n, t) - H_0(t) \\ Q(x_1, t) - Q_0(t) \\ Q(x_2, t) - Q_0(t) \\ \vdots \\ Q(x_n, t) - Q_0(t) \end{pmatrix}.$$

Nous passons donc d'un système à 2 dimensions à un système à $2n$ dimensions. Cela implique d'ajuster les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} & \text{devient} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & & \dots & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \dots & & \ddots & & \\ 0 & & \dots & g_1 & 0 & \dots & & g_2 \end{pmatrix}, \\ * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} & \text{devient} \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \dots & a_1 & 0 & \dots & & a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons donc un système à $2n$ dimensions de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ g_1 \mathbb{I}_n & g_2 \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ a_1 \mathbb{I}_n & a_2 \mathbb{I}_n \end{pmatrix} T \right) \begin{pmatrix} h_d \\ q_d \end{pmatrix}.$$

Pour rappel, notre but est d'obtenir un système linéaire de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

La matrice A sera donc une matrice définie par :

$$A = \left(\begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ g_1 \mathbb{I}_n & g_2 \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ a_1 \mathbb{I}_n & a_2 \mathbb{I}_n \end{pmatrix} T \right).$$

La matrice B nous est donnée par les conditions frontière

$$Q(0, t) = Q(x_1, t) = w_1(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Q(0, t) = u_1(t)$$

et

$$Q(L, t) = Q(x_n, t) = w_2(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Q(L, t) = u_2(t)$$

qui nous permettent d'écrire :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que nous pouvons également choisir des conditions frontières qui concernent la hauteur $H(0, t)$ ou $H(L, t)$ ce qui implique qu'il faut placer les 1 dans la matrice B en $B(1, 1)$ ou $B(n, 2)$ respectivement.

De même, puisque nous souhaitons contrôler la hauteur à chaque extrémité, la matrice C sera de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

afin d'obtenir $H(0, t)$ et $H(L, t)$ comme sortie du système.

Ici encore, nous pouvons bien sur choisir le débit comme sortie. Dans ce cas, il faudra placer les 1 en $C(1, n + 1)$ et $C(2, 2n)$.

Remarquons que l'on peut avoir des conditions frontières ou des sorties qui sont un combiné de débit et de hauteur, au début ou à la fin du canal. Il y a donc plusieurs possibilités d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.

3 Analyse d'un cas à conditions initiales uniformes

Dans cette section, nous allons effectuer l'analyse du système linéarisé pour un système physique particulier. Il s'agira donc de vérifier la contrôlabilité et l'observabilité du système dans un premier temps, pour ensuite appliquer des contrôles adéquats dessus. Nous allons donc devoir fixer les différents paramètres et choisir des conditions initiales et des conditions frontières. Dans notre cas, il s'agira de conditions initiales uniformes le long du canal, c'est-à-dire que la hauteur et le débit posséderont la même valeur initiale en chaque point du canal. Cette section s'appuie sur [6].

3.1 Choix des paramètres et des conditions

Dans l'article [5], des valeurs de paramètres et de conditions initiales nous sont données pour des simulations sur un micro-canal. Voici les conditions initiales :

- $H(x, 0) = 0.4.10^{-1}m \forall x$,
- $Q(x, 0) = 1.8.10^{-3}m^3/s \forall x$.

Nous souhaitons dans ce cas obtenir comme sortie la hauteur au début du canal $H(0, t)$ et le débit à la sortie du canal $Q(L, t)$. Nous aurons donc un vecteur $y(t)$ de la forme :

$$y(t) = \begin{pmatrix} H(x_1, t) \\ Q(x_n, t) \end{pmatrix}$$

ce qui implique une matrice C de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les conditions frontières nous sont données par la dérivée par rapport au temps de la hauteur à la fin et du débit au début du canal :

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h(L, t) \\ q(0, t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H(x_n, t) \\ Q(x_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

ce qui implique une matrice B de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs utilisées pour les paramètres et les équilibres sont les suivantes :

- $L = 8m$,
- $K = 100$,
- $I = 2.10^{-3}$,
- $H_0 = 0.9.10^{-1}m$,
- $Q_0 = 4.1.10^{-3}m^3s^{-1}$.

Nous allons commencer notre analyse avec une discrétisation $n = 10$, ce qui nous donne un système de dimension 20. Par la suite nous augmenteront cette dimension afin de se rapprocher encore plus de la réalité et de voir ainsi l'influence de ce paramètre. Notons que les paramètres et conditions initiales et d'équilibre données ici resteront les même tout au long de cette section.

3.2 Description externe : la fonction de transfert

Une manière de mettre en relation l'entrée et la sortie d'un système est la fonction de transfert $\hat{G}(s)$ qui est calculée de la façon suivante :

$$\hat{G}(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D.$$

La relation entre l'entrée et la sortie peut être décrite par

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s).$$

Dans notre cas, puisque nous possédons un système à 2 entrées et 2 sorties, la fonction de transfert sera une matrice de taille 2×2 :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & \hat{G}_{12}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & \hat{G}_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

L'annexe donne la forme explicite de chaque terme de cette fonction de transfert étant donné qu'ils sont assez conséquents.

3.3 Stabilité interne et stabilité externe

Nous allons ici étudier la stabilité interne et externe du système. La stabilité interne se réfère à la bornitude des trajectoires d'état de système. Si celles-ci sont toutes bornées, alors le système sera internement exponentiellement stable. Nous pouvons vérifier cette stabilité interne en regardant la partie réelle de toutes les valeurs propres de la matrice A . Si la partie réelle de chacune d'entre elles est négative, alors le système sera internement stable. Regardons donc ces valeurs propres calculées par Matlab :

Valeurs propres =

```
0.00251954304278 + 1.15721768991107i
0.00251954304278 - 1.15721768991107i
-0.00528283229268 + 1.05019714143268i
-0.00528283229268 - 1.05019714143268i
0.00251953228526 + 0.94337498525200i
0.00251953228526 - 0.94337498525200i
-0.00528282153517 + 0.85613103478567i
-0.00528282153517 - 0.85613103478567i
0.00251948907950 + 0.61575079530514i
0.00251948907950 - 0.61575079530514i
-0.00528277832941 + 0.55880635086070i
-0.00528277832941 - 0.55880635086070i
0.00251894058067 + 0.21387668774127i
0.00251894058067 - 0.21387668774127i
-0.00528222983057 + 0.19410008972920i
-0.00528222983057 - 0.19410008972920i
0.00000010150612
-0.00000010151028
-0.00276333422383
-0.00276324427183
```

Nous constatons que la moitié des valeurs propres sont négatives tandis que l'autre moitié est positive. Le système n'est donc pas internement stable. Nous voyons que toutes ces valeurs propres sont réparties de part et d'autre de l'axe des complexes et en sont fort proche.

Regardons au niveau de la stabilité externe du système. Celui-ci sera externement stable si les racines du dénominateur de la fonction de transfert

sont strictement négatives. Voici le dénominateur :

$$\begin{aligned}
& s^{20} + 0.02763s^{19} + 4.84s^{18} + 0.124s^{17} + 9.421s^{16} + 0.2191s^{15} \\
& + 9.446s^{14} + 0.1948s^{13} + 5.185s^{12} + 0.09227s^{11} + 1.525s^{10} \\
& + 0.02262s^9 + 0.2168s^8 + 0.002547s^7 + 0.01149s^6 + 0.0001038s^5 \\
& + 0.0001971s^4 + 1.088e - 06s^3 + 1.503e - 09s^2 + 5.286e - 22s + 7.349e - 24
\end{aligned}$$

Et voici ses racines :

Racines =

```

0.00251954304278 + 1.15721768991107i
0.00251954304278 - 1.15721768991107i
-0.00528283229268 + 1.05019714143268i
-0.00528283229268 - 1.05019714143268i
0.00251953228526 + 0.94337498525200i
0.00251953228526 - 0.94337498525200i
-0.00528282153517 + 0.85613103478567i
-0.00528282153517 - 0.85613103478567i
0.00251948907950 + 0.61575079530514i
0.00251948907950 - 0.61575079530514i
-0.00528277832941 + 0.55880635086070i
-0.00528277832941 - 0.55880635086070i
0.00251894058067 + 0.21387668774127i
0.00251894058067 - 0.21387668774127i
-0.00528222983057 + 0.19410008972920i
-0.00528222983057 - 0.19410008972920i
0.00000010150612
-0.00000010151028
-0.00276333422383
-0.00276324427183

```

Elles ne sont pas toutes négatives, ce qui signifie que notre système n'est pas extérieurement stable.

3.4 Contrôlabilité et observabilité

Dans le cas des systèmes linéaires $[A, B, C, D]$, il est possible de calculer une matrice de contrôlabilité \mathcal{C} ainsi qu'une matrice d'observabilité \mathcal{O} . Elles

sont obtenues de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B \ A^nB)$$

et

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ CA^n \end{pmatrix}.$$

Une façon d'étudier l'observabilité et la contrôlabilité d'un système est de vérifier les rangs de ces deux matrices. Un rang plein (c'est-à-dire de la même dimension que le système étudié), donc de valeur 20 dans notre cas, signifie que le système est complètement contrôlable s'il s'agit du rang de \mathcal{C} et qu'il est complètement observable s'il s'agit du rang de la matrice \mathcal{O} . Une fois de plus, Matlab nous donne directement le résultat souhaité :

Rang matrice de contrôlabilité =

20

Rang matrice d'observabilité =

20

Nous constatons que notre système donc complètement observable et complètement contrôlable.

Stabilisabilité et détectabilité

Cette analyse est très courte dans notre cas car notre système est complètement observable et complètement contrôlable. Or un système complètement observable est détectable et un système complètement contrôlable est stabilisable. Nous avons donc un système détectable et stabilisable.

3.5 Tests dynamiques en boucle ouverte

Passons maintenant à quelques tests en boucle ouverte afin de voir l'évolution de notre système dans le temps et l'espace.

La variable d'espace est fixée puisque la longueur de notre canal est donnée ainsi que la discrétisation choisie. De même l'état initial est fixé et uniforme. Pour commencer, nous allons comparer les trajectoires d'état pour différents laps de temps, certain très courts et d'autres beaucoup plus longs.

Rapellons que le temps se calcule ici en secondes. Les différents laps de temps choisis sont : 20 secondes, 150 secondes, 1000 secondes, 5000 secondes et finalement 8000 secondes. A chaque laps de temps est associé deux graphiques : l'un pour l'évolution de la hauteur de l'eau et l'autre pour l'évolution du débit d'eau.

Il faut cependant préciser qu'il s'agit de la différence entre la hauteur d'eau et la hauteur d'eau à l'équilibre, c'est-à-dire que nous travaillons en variables linéaires. Il ne faut donc pas s'étonner de trouver des valeurs négatives.

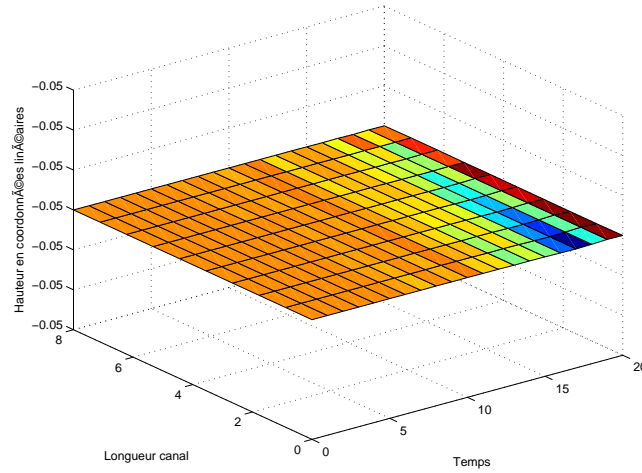


FIGURE 9 – Evolution de la hauteur d'eau pour un laps de temps de 20 secondes

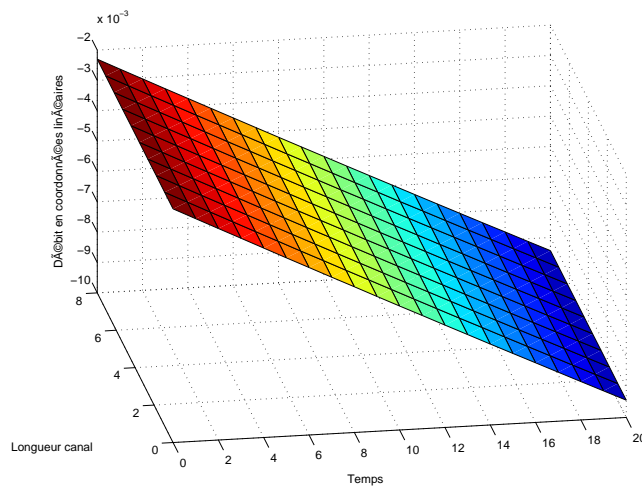


FIGURE 10 – Evolution du débit d'eau pour un laps de temps de 20 secondes

Dans un premier temps, le système semble relativement stable lorsqu'on le laisse évoluer sur un très petit laps de temps de l'ordre de quelques secondes. En effet, en regardant la graduation des axes de hauteur et de débit, nous constatons qu'il est gradué sur un très court intervalle de valeurs.

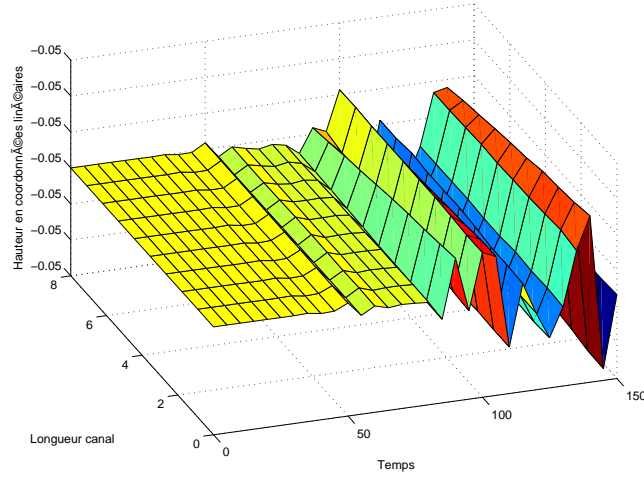


FIGURE 11 – Evolution de la hauteur d'eau pour un laps de temps de 150 secondes

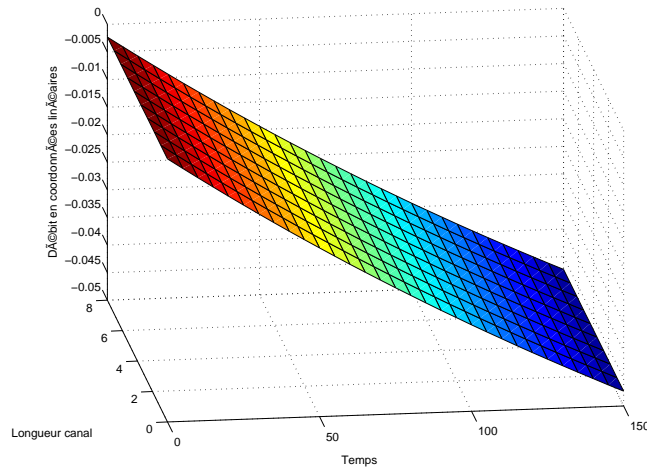


FIGURE 12 – Evolution du débit d'eau pour un laps de temps de 150 secondes

Après avoir laissé le système évoluer un peu plus longtemps, c'est-à-dire sur quelques minutes, nous constatons déjà un changement dans le comportement de la hauteur qui se met à varier vers la fin de l'intervalle de temps. Cependant nous gardons toujours un intervalle de valeurs pour la hauteur et le débit qui est très court.

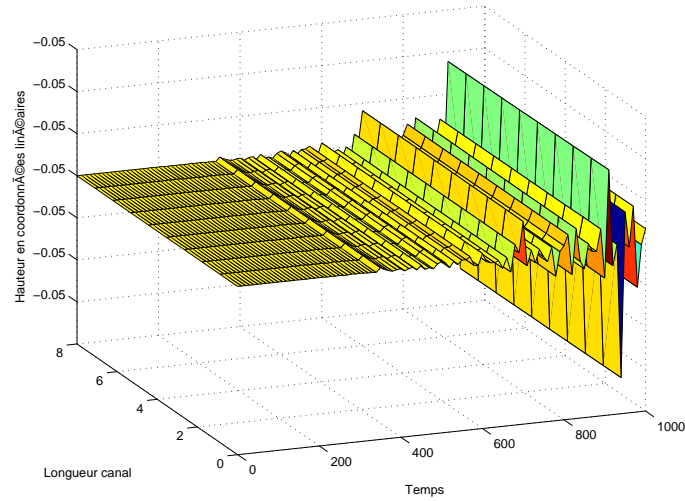


FIGURE 13 – Evolution de la hauteur d’eau pour un laps de temps de 1000 secondes

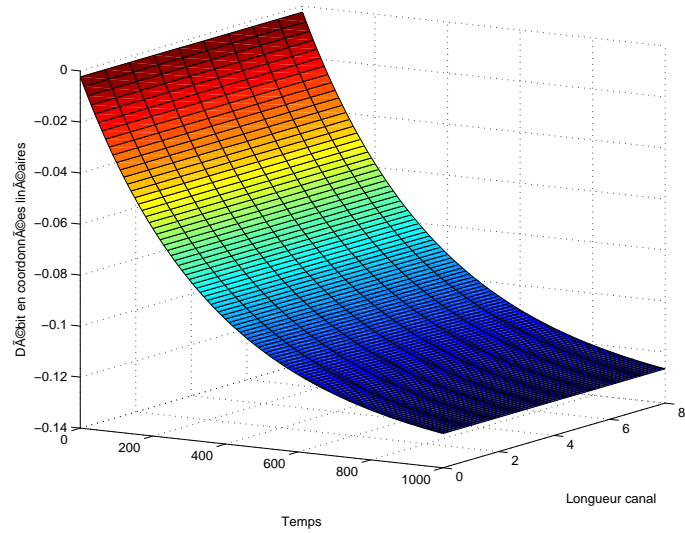


FIGURE 14 – Evolution du débit d’eau pour un laps de temps de 1000 secondes

Toujours un pour laps de temps de plusieurs minutes, le comportement reste approximativement le même que pour une ou deux minutes.

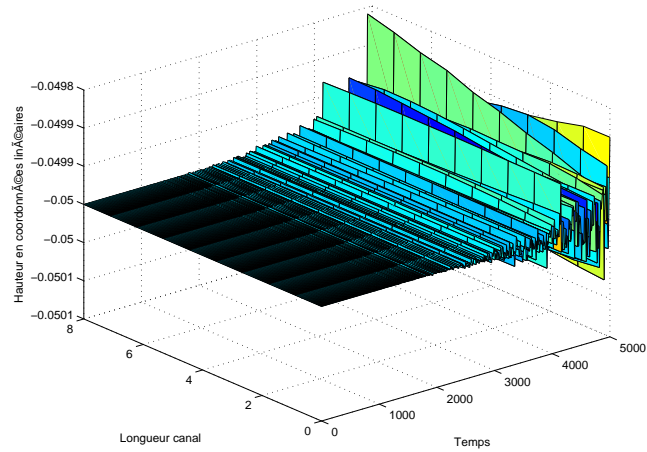


FIGURE 15 – Evolution de la hauteur d’eau pour un laps de temps de 5000 secondes

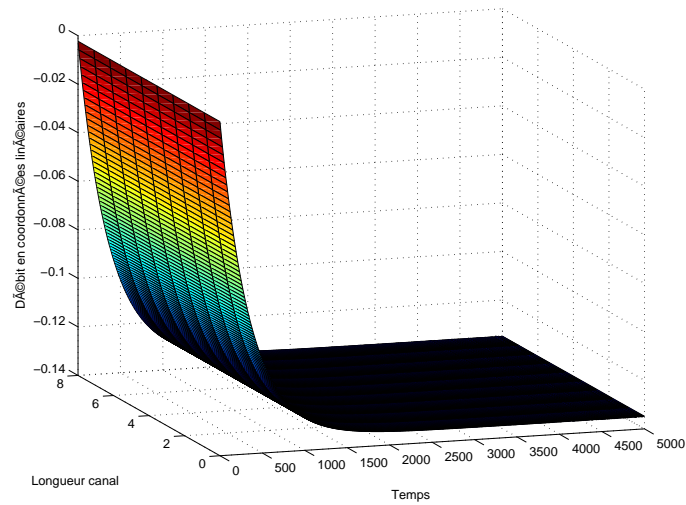


FIGURE 16 – Evolution du débit d’eau pour un laps de temps de 5000 secondes

A présent, nous regardons l’évolution sur un peu plus d’une heure. L’intervalle des valeurs que prennent le débit et la hauteur s’agrandit mais le débit semblerait vouloir se stabiliser. Nous allons donc regarder sur un laps de temps encore plus long si cela est le cas.

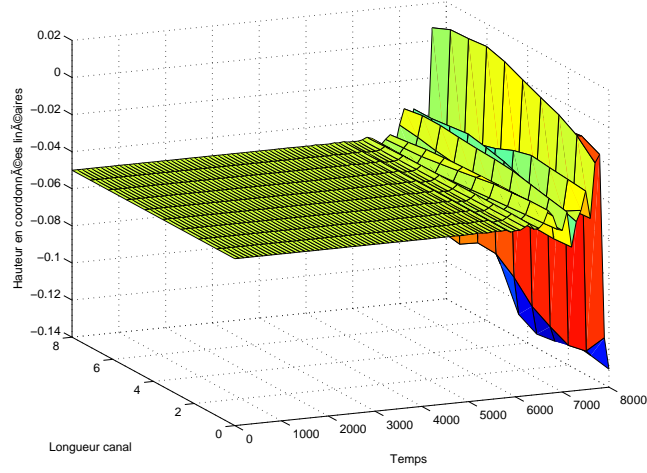


FIGURE 17 – Evolution de la hauteur d’eau pour un laps de temps de 8000 secondes

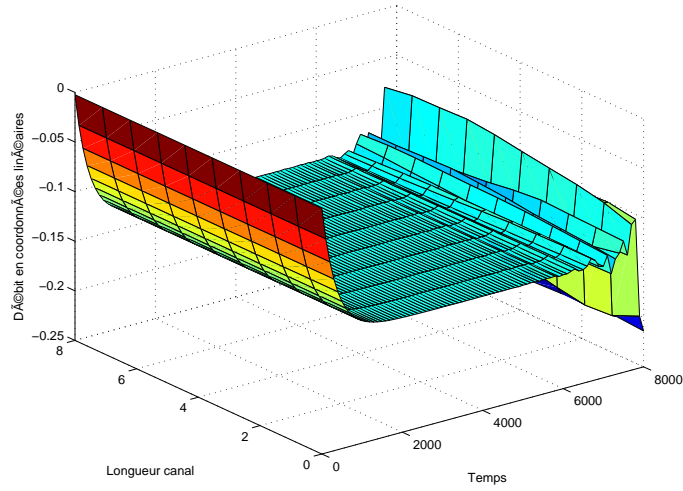


FIGURE 18 – Evolution du débit d’eau pour un laps de temps de 8000 secondes

Enfin, nous constatons que sur un laps de temps fort élevé, le débit et la hauteur se comportent de manière instable avec des valeurs de plus en plus éloignées de la valeur de départ. De plus même en s’en écartant, aucune de ces deux variables ne semble se stabiliser autour de 0.

3.6 Réponse impulsionnelle et indicielle

La réponse impulsionnelle correspond au comportement du système lorsqu'il reçoit une entrée élevée mais très brève. Dans le cas de notre système cela signifierait que la hauteur d'eau ou que le débit au début ou à la fin de notre canal varie fortement sur un laps de temps très court pour ensuite revenir à son état normal.

Les 4 graphes nous représentent l'influence de chaque entrée sur chaque sortie. Pour rappel, la première entrée est la variation de la hauteur d'eau à la fin du canal, la deuxième entrée est la variation de débit au début du canal, la première sortie est la hauteur d'eau au début du canal et enfin la deuxième sortie est le débit à la fin du canal.

Nous voyons sur les graphes de gauche qu'une variation brève mais élevée de la hauteur d'eau à la fin du canal implique une diminution de la hauteur d'eau et du débit au début du canal. Sur les graphes de droite, nous observons qu'une variation brève du débit à l'entrée du canal provoque une augmentation de la hauteur d'eau à ce même endroit ainsi qu'une augmentation du débit à la fin du canal.

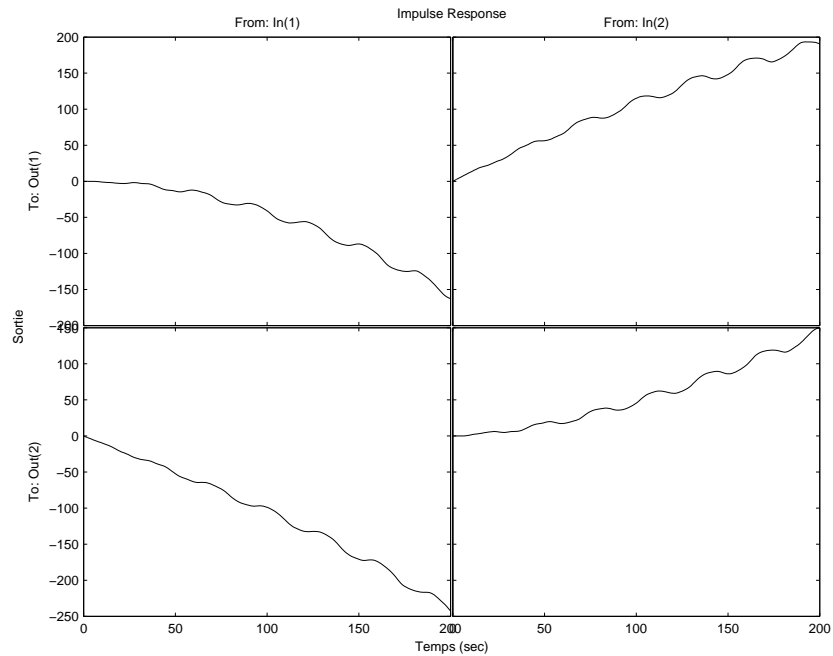


FIGURE 19 – Réponse impulsionnelle

Nous allons regarder au niveau de la réponse indicielle qui, elle, correspond à une entrée constante et continue c'est-à-dire que la variation de la hauteur à la fin du canal et que la variation du débit au début du canal seront maintenues. Nous voyons sur le graphique en haut à gauche que si

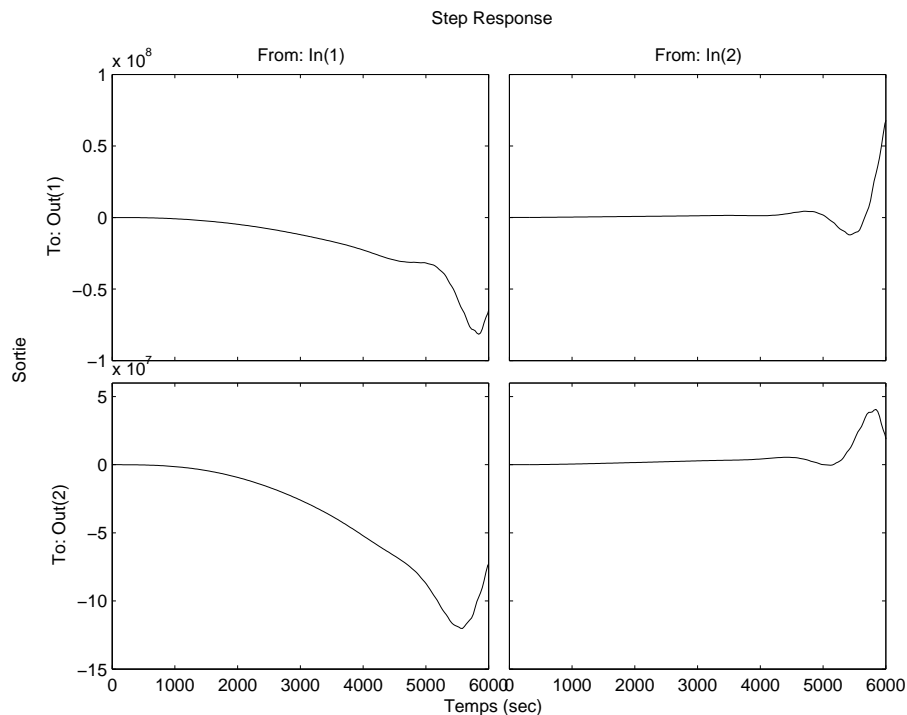


FIGURE 20 – Réponse indicielle

la variation de la hauteur d'eau à la fin du canal est maintenue, alors la hauteur d'eau au début du canal diminuera au fil du temps pour finalement remonter légèrement. De meme, nous voyons que si la variation du débit d'eau au début du canal est constante et continue, alors la hauteur d'eau à ce meme endroit va augmenter significativement. Nous avons également que si la variation de la hauteur d'eau à la fin du canal est constante alors le débit à ce même endroit va diminuer. Enfin, nous en tirons aussi que si la variation de débit au début du canal est constante alors le débit à la fin du canal n'augmentera légèrement qu'au bout d'un assez grand moment.

3.7 Contrôle linéaire pour des conditions initiales uniformes

Cette partie est consacrée à la stabilisation du système étudié. En effet, nous avons vu que les trajectoires d'état libres ne convergent pas asymptotiquement vers l'état nul, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At} x_0 \neq 0.$$

Nous allons donc tenter de stabiliser ce système de deux façons : par asservissement de l'état réel et par asservissement dynamique de l'état estimé. Pour cela, nous allons concevoir un contrôle $u(t)$ qui soit tel que pour tout x_0 , la trajectoire d'état correspondante converge vers l'état nul. Ensuite, nous appliquerons ces contrôles au système non-linéaire.

Rappelons que nous travaillons dans le cadre de conditions initiales uniformes, c'est-à-dire que le débit et la hauteur d'eau en $t = 0$ sont les mêmes en chaque point du canal. Et n'oublions pas que nous travaillons en variables linéaires qui ont été obtenues par la différence entre les variables de départ et la valeur de ces variables à l'équilibre :

$$y(x, t) = Y(x, t) - Y_0(x).$$

De ce fait, notre vecteur d'état initial est $x_{initial}(x, 0) = X_{initial}(x, 0) - X_0(x)$.

3.7.1 Contrôle d'état par asservissement d'état

Une loi d'asservissement statique d'état est un contrôle $u(\cdot)$ de la forme

$$u(\cdot) = Kx(\cdot) + v(\cdot)$$

où $K \in R^{m \times n}$ est la matrice d'asservissement d'état et $v(\cdot)$ est une entrée externe.

Nous obtenons donc un système asservi $R_K := [A + BK, B, C, 0]$ de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + Bv \\ y &= Cx \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Notre but est donc de trouver une matrice K telle que ce système asservi R_K soit internement stable, c'est-à-dire tel que la matrice $A + BK$ soit stable. Nous voulons donc une matrice $A + BK$ qui possède des valeurs propres strictement négatives.

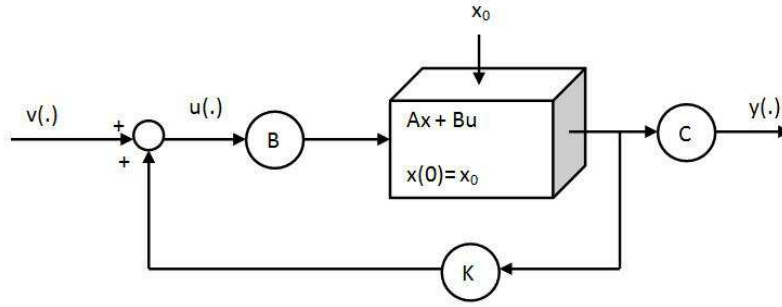


FIGURE 21 – Schéma d'un système avec feedback d'état

Afin de concevoir ce contrôle $u(t)$, Matlab a été utilisé. Celui-ci nous offre deux possibilités bien distinctes pour calculer la matrice K qui permettra de stabiliser le système. La première s'appuie sur le théorème d'assignabilité spectrale via la fonction 'place', tandis que la deuxième repose sur des notions d'optimisation et de fonction de coût via la fonction 'lqr'. Nous allons utiliser ces deux méthodes.

Première méthode : la fonction 'place'

Pour commencer, énonçons le théorème d'assignabilité spectrale.

Théorème 3.1 Assignabilité spectrale

Pour tout polynôme monique $\Pi \in \mathbb{R}[s]$ de degré d , il existe une matrice d'asservissement K telle que $\chi_{A+BK}(s) = \Pi(s)$, où $\chi_{A+BK}(s)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A + BK$

\iff

le système (A, B) est complètement contrôlable.

Grâce à ce théorème, nous voyons que nous pouvons assigner les valeurs propres que nous souhaitons à la matrice $A + BK$ puisque le système R est complètement contrôlable. Pour cela, nous utiliserons la fonction 'place' qui utilise 3 arguments d'entrée : la matrice A , la matrice B ainsi qu'un vecteur contenant les valeurs propres que nous souhaitons obtenir pour la matrice $A + BK$. En fonction de ces 3 paramètres, 'place' nous renvoie comme sortie la matrice K qui satisfait cette condition.

Nous allons donc pouvoir choisir les valeurs propres comme étant négatives afin que le système obtenu soit stable. Il nous faut cependant veiller à

ce que le contrôle $u(.)$ que nous allons obtenir avec cette matrice $A + BK$ possède des valeurs cohérentes, que les variations engendrées par ce contrôle sur le système possèdent également des valeurs cohérentes et enfin que cette stabilisation se fasse le plus rapidement possible. Il nous faut donc trouver un compromis entre ces conditions.

Comme valeurs propres de la matrice $A + BK$ nous choisissons celles de A diminuées d'une certaine valeur afin qu'elles deviennent toutes négatives. Au vu des valeurs propres de A (cfr. la contrôlabilité), nous voyons qu'il ne faudra pas les diminuer de beaucoup. Pour ce faire, rappelons les conditions initiales ainsi que les conditions d'équilibre :

- la hauteur à l'équilibre vaut 0.09,
- le débit à l'équilibre vaut 0.0041 ,
- la hauteur initiale le long du canal est de 0.04,
- la débit initial le long du canal vaut 0.0018.

Or, nous travaillons en variables linéaires définies comme différence entre l'état réel et l'état d'équilibre. Nous pourrions donc avoir des valeurs négatives mais ne pouvant pas descendre en dessous de 0.09 pour la hauteur d'eau. De même, pour le débit, il nous faut rester dans des grandeurs de l'ordre de $10^{-3}m^3/s$.

Nous allons tester 4 différentes diminutions sur ces valeurs propres et voir leur influence sur le comportement de notre système. Les diminutions considérées sont testées sur un intervalle de temps de 1000 secondes et sont les suivantes : -0.5 , -0.05 , -0.01 et -0.005. Puisque nous voulons une stabilisation qui se fait assez rapidement (donc en moins de 1000 secondes) mais sans provoquer de grandes variations de débit ou de hauteur, cet intervalle de temps paraît adéquat.

De plus, notons que l'état initial n'est pas fort proche de l'état d'équilibre. En utilisant cet état initial, nous allons chercher la diminution qui stabilise le système en un intervalle de temps assez court car cela nous donnera un bon compromis entre le temps de stabilisation et état initial choisi, qui n'est pas forcément proche de l'équilibre.

- Evolution de la stabilisation pour une diminution des valeurs propres de A de 0.5

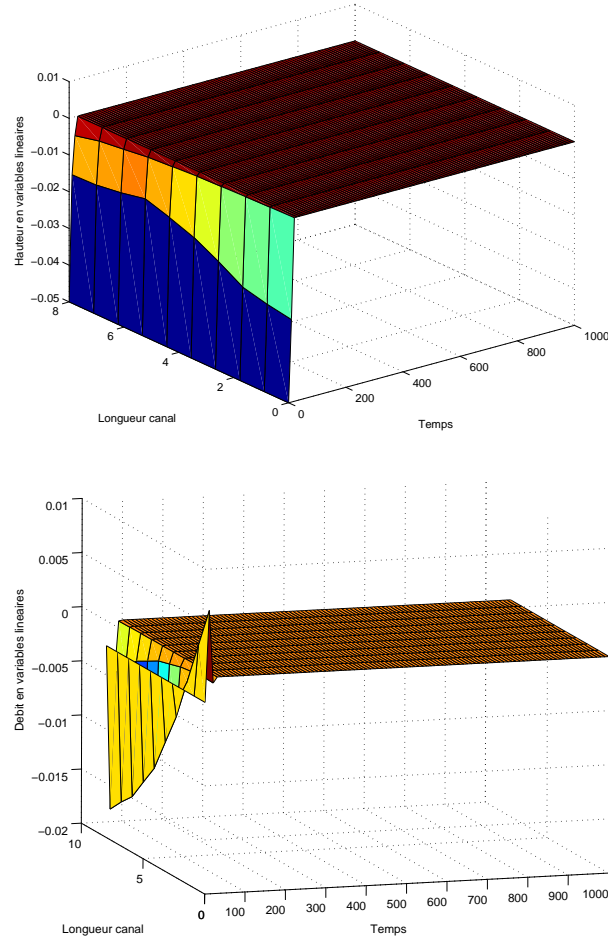


FIGURE 22 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires

Nous constatons que notre système se stabilise très rapidement avec cette diminution mais également que les valeurs que prennent la hauteur et le débit varient très fortement sur un laps de temps très très court (de l'ordre d'une ou deux secondes!).

- Evolution de la stabilisation pour une diminution des valeurs propres de A de 0.05

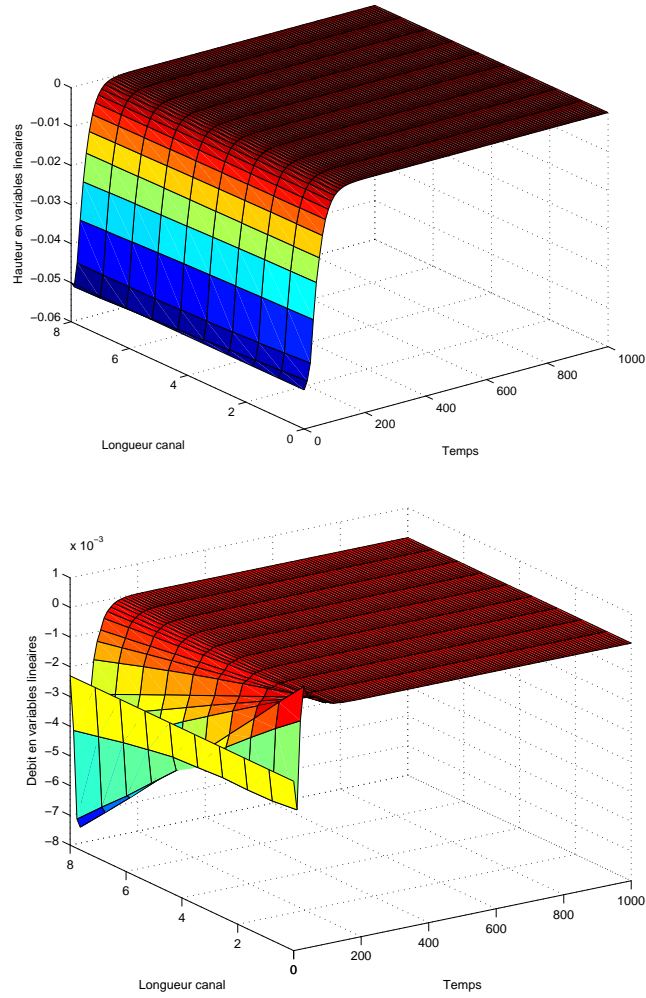


FIGURE 23 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires

Dans ce cas, la stabilisation se fait rapidement (en moins de 200 secondes) avec des variations réalistes tant pour la hauteur que pour le débit.

- Evolution de la stabilisation pour une diminution des valeurs propres de A de 0.01

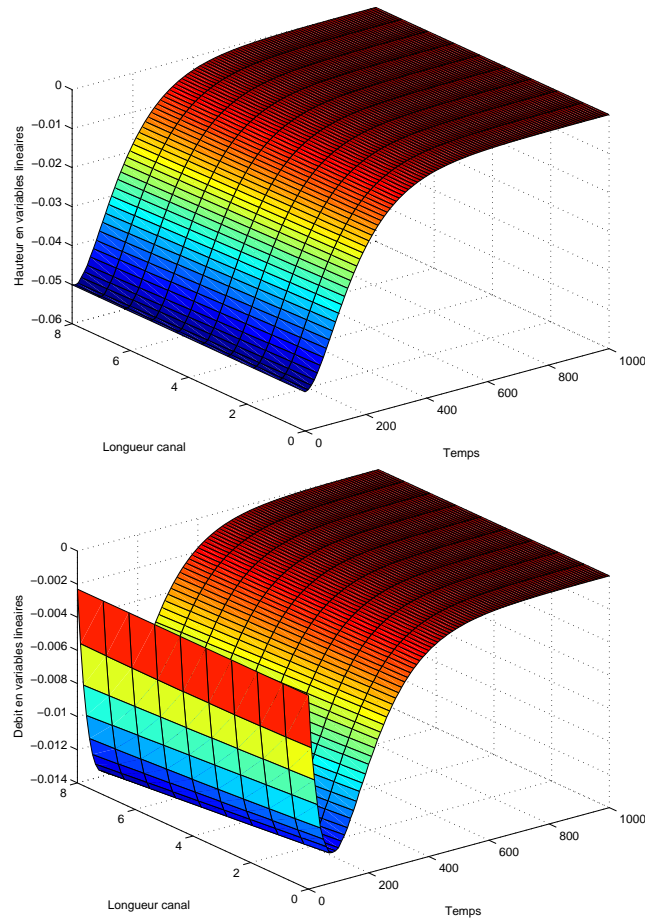


FIGURE 24 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires

Ici, nous voyons que la stabilisation se fait en plus ou moins 1000 secondes, sans comportement très variable sur un court laps de temps. Mais nous constatons cependant que le débit subit une variation de grande valeur.

- Evolution de la stabilisation pour une diminution des valeurs propres de A de 0.005

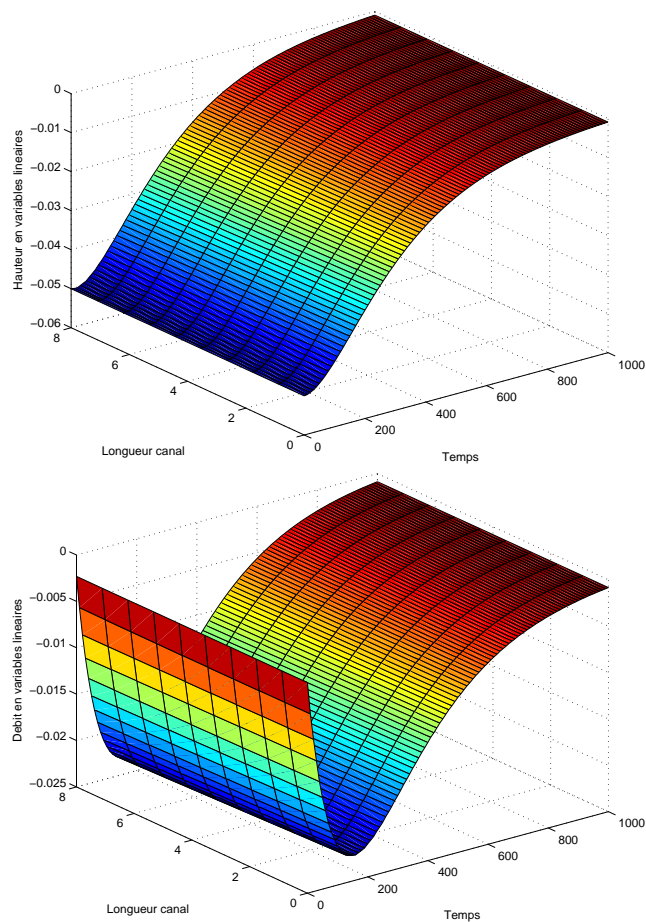


FIGURE 25 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires

Nous voyons ici que le système semble commencer à se stabiliser au bout de 1000 secondes.

- *Conclusion*

Nous avons testé différentes diminutions des valeurs propres de A . Au vu des graphiques précédents, il s'avère que si la diminution est trop importante (0,5) la stabilisation provoque de trop grandes variations sur un laps de temps trop court, tandis que si la diminution est trop petite (0,005) la stabilisation s'effectue très lentement. Un bon compromis semble être la diminution de 0,05 qui se stabilise assez rapidement (en moins de 400 secondes) tout en respectant des valeurs plausibles pour la hauteur (elle augmente simplement de l'état initial vers l'état d'équilibre) et le débit (qui reste de l'ordre de $10^{-3}m^3/s$).

Puisque la stabilisation pour une diminution de 0,05 semble s'effectuer en moins de 200 secondes, zoomons sur cette partie des graphiques de hauteur et de débit.

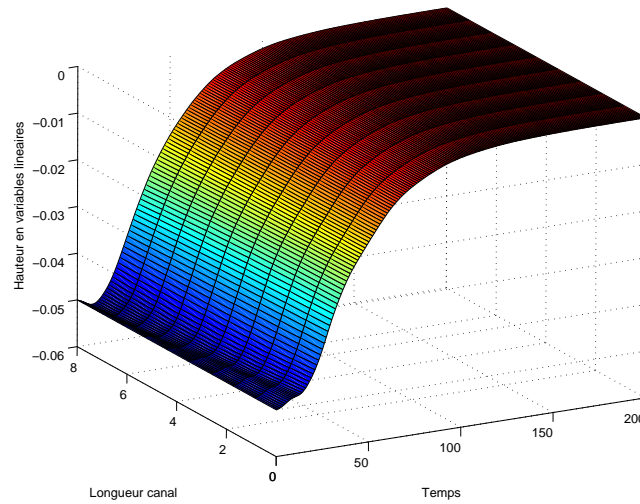


FIGURE 26 – Hauteur (en var. linéaires) pour une diminution de 0,05 durant 200 secondes.

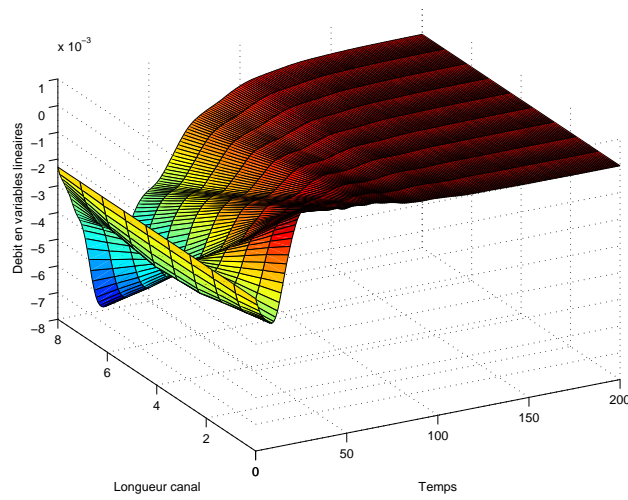


FIGURE 27 – Débit (en var. linéaires) pour une diminution de 0,05 durant 200 secondes.

- *Le contrôle $u(t)$*

Le contrôle $u(t)$ est formé de deux composantes : la dérivée par rapport au temps de la hauteur à la fin du canal et du débit au début du canal :

$$u(t) = \left(\frac{\frac{d}{dt}H(L,t)}{\frac{d}{dt}Q(0,t)} \right).$$

A présent que nous avons déterminé une diminution réaliste des valeurs propres de A , nous pouvons regarder l'évolution de $u(t)$ dans le temps. Nous possédons donc un contrôle $u(t)$ dont nous connaissons les valeurs à chaque point de discrétisation pour notre système linéaire. Nous voyons que ces deux variables se stabilisent en moins de 200 secondes, nous allons donc zoomer sur les 200 premières secondes de cet intervalle. Cependant, nous savons que u correspond à des dérivées par rapport au temps du débit et de la hauteur d'eau, c'est-à-dire aux variations de ces deux variables. Il est donc possible de retrouver les valeurs du débit et de la hauteur correspondantes.

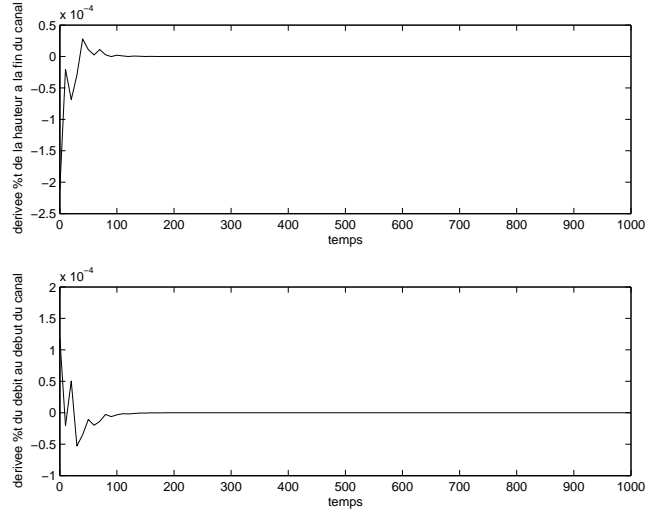


FIGURE 28 – Evolution des 2 composantes de u sur un intervalle de temps de 1000 secondes : u_1 en haut et u_2 en bas.

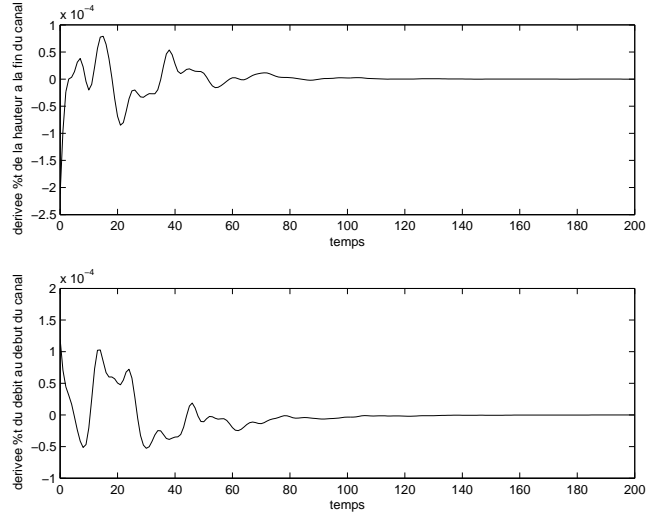


FIGURE 29 – Evolution des 2 composantes de u sur un intervalle de temps de 200 secondes : u_1 en haut et u_2 en bas.

Deuxième méthode : la fonction 'lqr'

La deuxième méthode s'appuie sur l'optimisation d'une fonction de coût. Elle calcule la matrice K telle que le contrôle $u(t) = Kx$ minimise la fonction de coût quadratique suivante :

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt.$$

Par défaut, $N = 0$. Les 4 entrées demandées sont A , B , Q et R . Puisque nous sommes en dimension finie, les conditions à remplir par les matrices Q et R sont d'être, respectivement, semi définie positive et définie positive afin d'assurer la positivité de la fonction de coût. Celles-ci sont appelées matrices de poids et sont des matrices diagonales. Elles vont définir le compromis entre le contrôle à fournir et la performance de stabilisation (c'est-à-dire la vitesse avec laquelle $x(t)$ converge vers l'état nul 0). Il est également demandé que le système (A, B) soit contrôlable afin d'assurer que la fonction de coût soit bornée. La fonction va, à partir de ces entrées, calculer la matrice A par résolution d'une équation de Ricatti.

Les sorties fournies par cette fonction sont la matrice K , la solution S associée à l'équation de Ricatti et un vecteur e contenant les valeurs propres de la matrice $A + BK$. La matrice de gain K est ainsi donnée par $K = R^{-1}B^T P$ où P est solution de l'équation de Ricatti algébrique $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$.

A ce jour, il n'existe aucune méthode théorique permettant de dimensionner les matrices de poids Q et R d'une commande optimale "lqr". Généralement, on assigne manuellement des poids sur les diagonales de ces matrices afin de simplifier le problème. Ces poids sont choisis en fonction de comment on aimerait "pénaliser" les variables d'état par rapport aux entrées lorsqu'elles s'écartent de la consigne, ou inversement.

Observons les trajectoires de la hauteur et du débit (en variables linéaires) obtenues avec cette matrice K . Les 2 premiers graphes ont été effectués sur un intervalle de temps de 1000 secondes. Les 2 suivants sur un intervalle de temps de 200 secondes. En effet, sur un intervalle de 1000 secondes, nous voyons que la stabilisation s'effectue assez rapidement de sorte qu'on ne distingue pas nettement l'évolution du système. Nous diminuons donc l'intervalle à 200 secondes. Là, nous observons que le système semble osciller avant de se stabiliser. Il y a donc une différence avec le K précédent qui stabilisait le système de manière plus "uniforme". Physiquement, cela signifie qu'ici il y aura des remous.

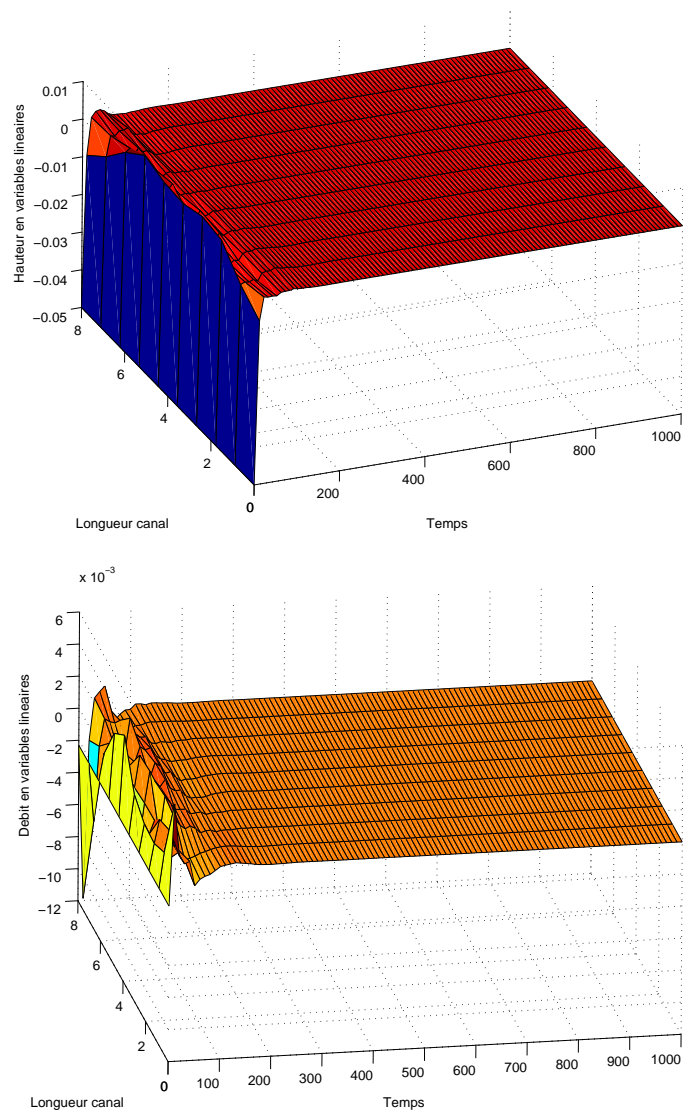


FIGURE 30 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires pour un intervalle de temps de 1000 sec.

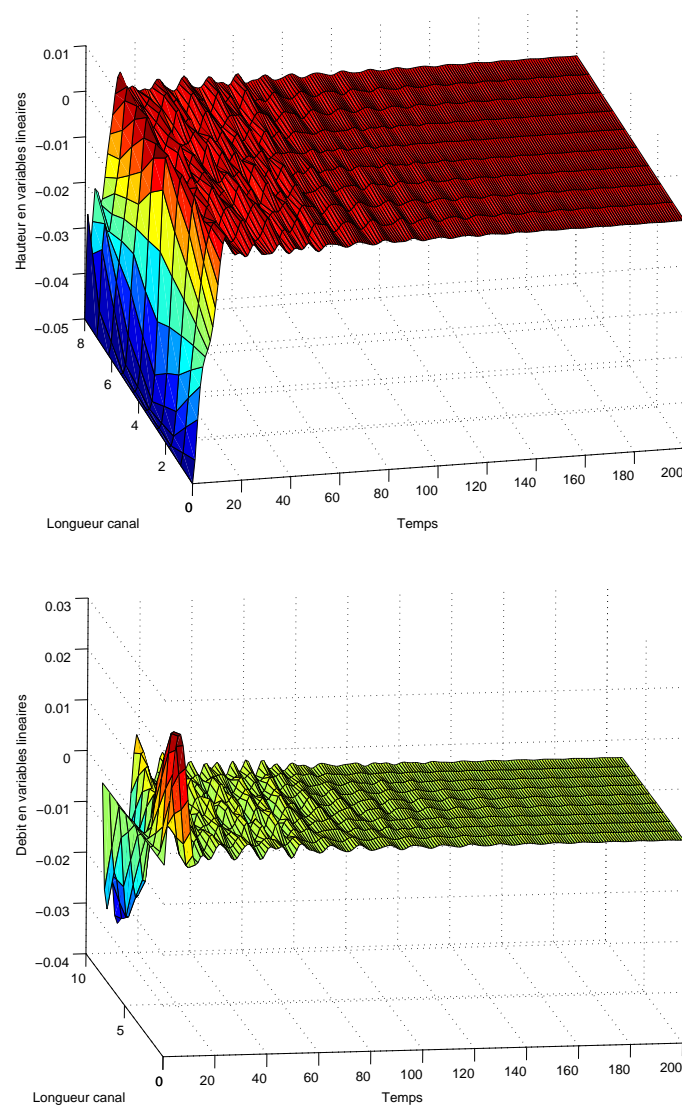


FIGURE 31 – Hauteur [graphe du haut] et débit[graphe du bas] en variables linéaires pour un intervalle de temps de 200 sec.

- *Le contrôle $u(t)$*

Nous pouvons remarquer que les remous observés sur les graphes précédents s'expliquent par la trajectoire de u , qui oscille de plus en plus faiblement.

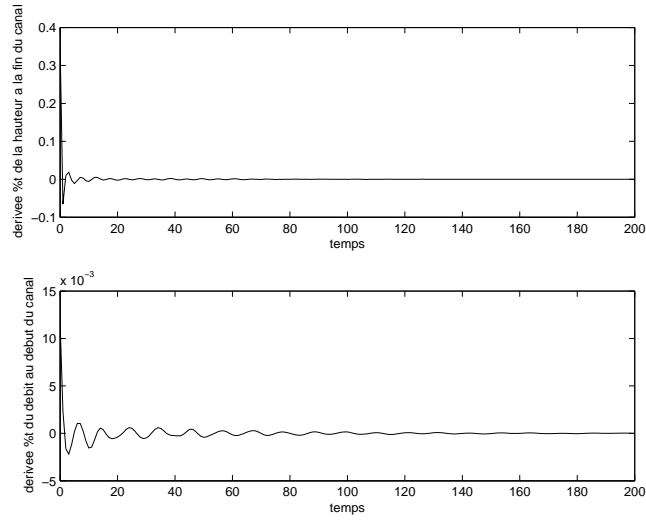


FIGURE 32 – Evolution des 2 composantes de u sur un intervalle de temps de 200 secondes : u_1 en haut et u_2 en bas.

3.7.2 Contrôle dynamique par asservissement de l'état estimé

Nous allons ici utiliser une autre technique afin de créer un contrôle stabilisant pour le système $R = [A, B, C, 0]$. Il s'agit de la compensation dynamique par asservissement de l'état estimé. Pour cela, nous commencerons par créer un estimateur d'état par injection de sortie avant de passer à la compensation dynamique.

Estimation d'état par injection de sortie

Reprenons le système décrit par $R = [A, B, C, 0]$. Il faut estimer la valeur de l'état $x(t)$, c'est-à-dire calculer $\tilde{x}(t)$ tel que l'erreur d'estimation $e(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$ soit aussi petite que possible.

Commençons par définir une injection statique de sortie. Il s'agit de l'ajout d'un terme $Ly(.) = LCx(.)$ dans le membre de droite de l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ly = (A + LC)x + Bu \\ y &= Cx \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

où L est la matrice d'injection de sortie.

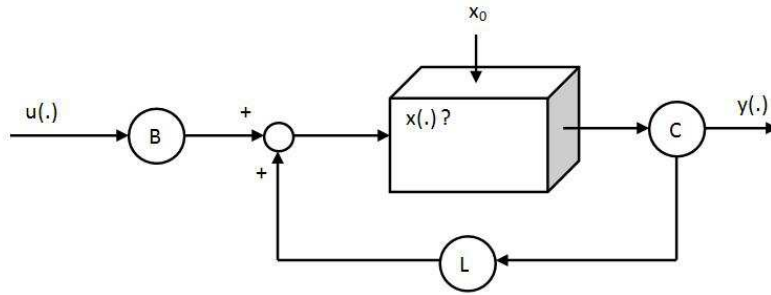


FIGURE 33 – Schéma d'un système avec injection de sortie

Nous pouvons faire un lien avec le feedback d'état par le concept de dualité et grâce au théorème suivant :

Théorème 3.2 $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est une matrice d'injection de sortie pour le système R (c'est-à-dire pour (C, A)) si et seulement si $K := L' \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est un feedback pour le système dual (A', C') .

Nous pourrions donc calculer la matrice L de la même manière que nous avons calculé la matrice K pour (A, B) . En effet, une injection de sortie est stabilisante pour le système $R = [A, B, C, 0]$ si et seulement si $A + LC$ est stable. De plus, l'existence d'une matrice d'injection de sortie est garantie par la détectabilité de (C, A) .

Nous obtenons donc un système possédant une description $R^L := [A + LC, B, C, 0]$.

Nous allons donc pouvoir calculer un estimateur d'état pour le système R . L'estimateur d'état est un système $\tilde{R} = [A, [B \ L], C, 0]$ décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0\end{aligned}$$

où \tilde{x} est l'état estimé et \tilde{y} la sortie estimée.

Regardons de plus près la dynamique de l'erreur sur l'état estimé puisque nous voulons cette erreur comme étant la plus petite possible :

$$\begin{aligned}e(t) &= x(t) - \tilde{x}(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= A(x(t) - \tilde{x}(t)) - LC(\tilde{x}(t) - x(t)) \\ &= Ae(t) + LCe(t) \\ &= (A + LC)e(t) \\ e(0) &= e_0 = x_0 - \tilde{x}_0\end{aligned}$$

Nous devons donc choisir L de sorte à ce que $e(t) = e^{(A+LC)t}e_0$ tende vers 0. L doit donc être stabilisante afin d'assurer que $A + LC$ soit stable.

- *Estimateur d'état : résultats*

Il s'agit ici de créer une matrice L stabilisante. En général, nous la voulons plus stable que la matrice K . La matrice L sera calculée par Matlab à l'aide de la fonction "place" qui nous permet de choisir les valeurs propres de $A + LC$, que nous prendrons inférieures à celles de $A + BK$. Nous tracerons ensuite les trajectoires d'état de l'erreur par $e(t) = e^{(A+LC)t}e_0$.

Les graphes suivants concernent la dynamique de l'erreur de l'estimateur d'état. L'erreur initiale est choisie comme étant une erreur de 10 % : $e_{initiale} = 0.1x_{initial}$. Nous allons étudier cette dynamique sur un intervalle de temps de 200 secondes puisque nous avons vu que c'est sur cet intervalle que la stabilisation s'effectuait en feedback réel.

Nous voyons donc sur les graphes 34 que nous avons un bon estimateur d'état car l'erreur tend vers 0 en plus ou moins 50 secondes en partant d'une erreur initiale de 10%. Pour nous en convaincre, nous allons regarder la dynamique de l'erreur si nous partons d'une erreur initiale de 25%, ce qui est relativement élevé. Nous voyons que cette fois encore l'erreur arrive à 0 assez rapidement. Cela soutient le fait que nous pensions avoir un bon estimateur. Il faut cependant noter que l'erreur a tendance à fortement varier dans les 50 premières secondes.

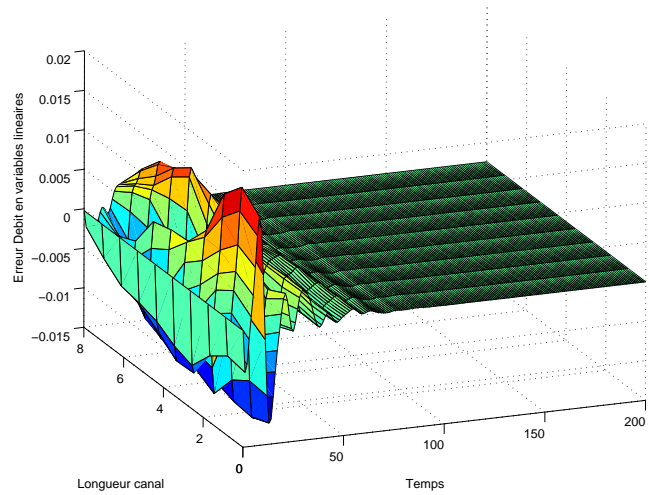
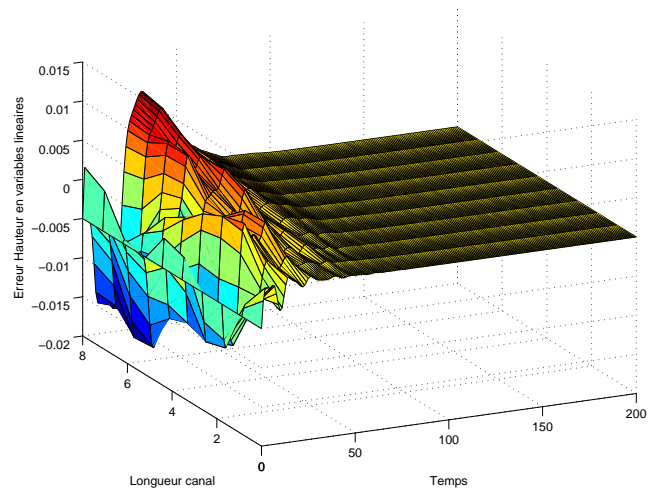


FIGURE 34 – Evolution de la dynamique de l'erreur sur la hauteur [graphe du haut] et le débit [graphe du bas] pour une erreur initiale de 10 %

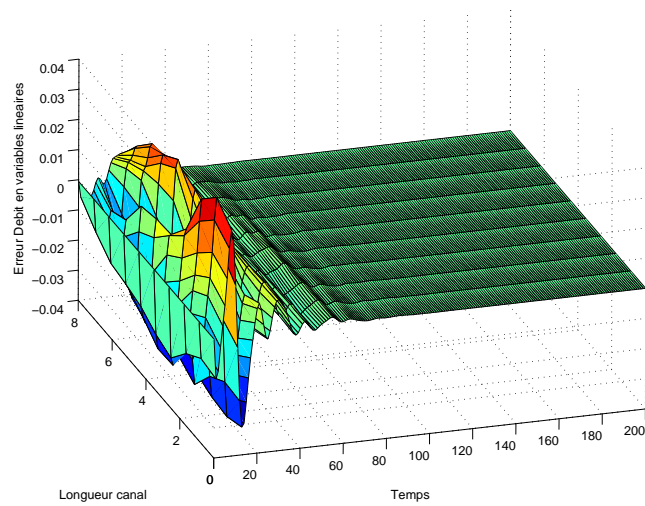
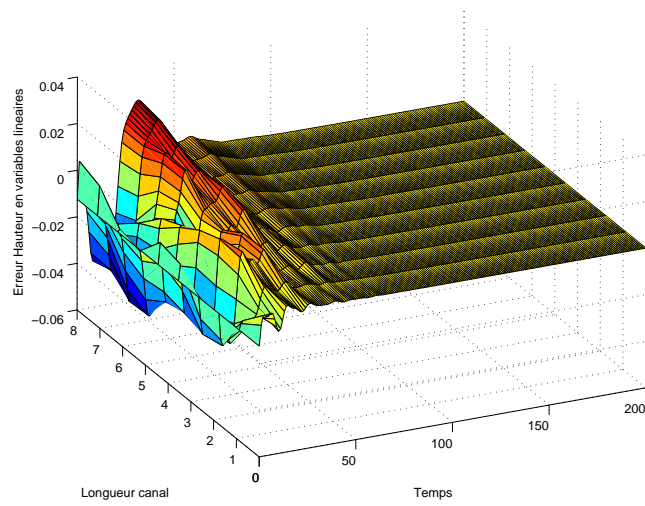


FIGURE 35 – Evolution de la dynamique de l'erreur sur la hauteur [graphe du haut] et le débit [graphe du bas] pour une erreur initiale de 25 %

Asservissement de l'état estimé

Un feedback de l'état estimé est une loi de contrôle $u(\cdot)$ de la forme

$$u(\cdot) = K\tilde{x}(\cdot) + v(\cdot)$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice d'asservissement, $v(\cdot)$ est une entrée externe et $\tilde{x}(\cdot)$ est l'état d'un estimateur d'état \tilde{R} .

Nous aurons donc le système asservi suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} v \\ y &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire (par une description équivalente) de la manière suivante, afin qu'apparaisse la dynamique de l'erreur d'estimation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v \\ y &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est cette dernière description que nous utiliserons.

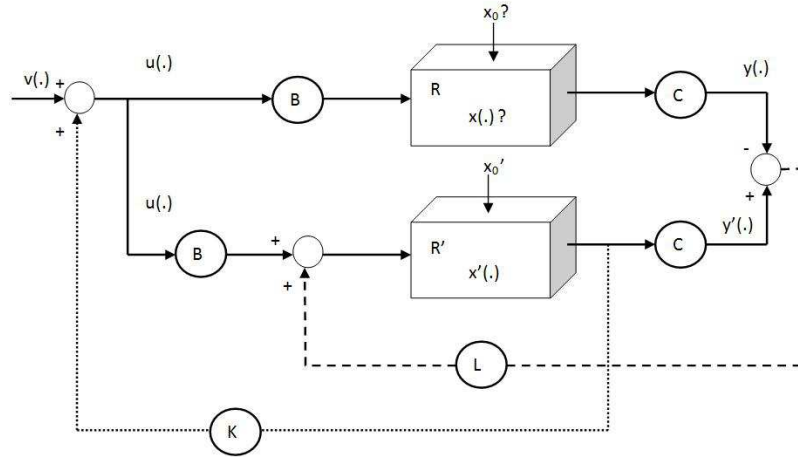


FIGURE 36 – Schéma d'un système avec compensateur dynamique créé par asservissement de l'état estimé où R' dénote le système estimateur d'état

De plus, par le principe de séparation, la dynamique de contrôle $A + BK$ et la dynamique d'estimation d'état $A + LC$ peuvent être conçues indépendamment l'une de l'autre. Notons également que les trajectoires d'état $x(.)$ (et donc de sortie $y(.)$) sont influencées par la dynamique de l'erreur $e(.)$ mais que cette dernière est indépendante de l'entrée $v(.)$.

- Résultats graphiques du compensateur dynamique

Les graphiques suivants présentent les trajectoires d'état de nos variables hauteur et débit soumises à un compensateur dynamique. La matrice L a toujours été calculée par la fonction "place" tandis que la matrice K est, dans les 2 premiers graphiques, calculée aussi par "place" et, dans le suivant, calculée par "lqr". Le premier graphique a été réalisé sur un intervalle de temps de 1000 secondes mais il est aisé de voir que le phénomène qui nous intéresse se produit dans les 200 premières secondes. Les deux autres graphiques (un avec "place" et un avec "lqr") sont donc réalisés sur un intervalle de 200 secondes.

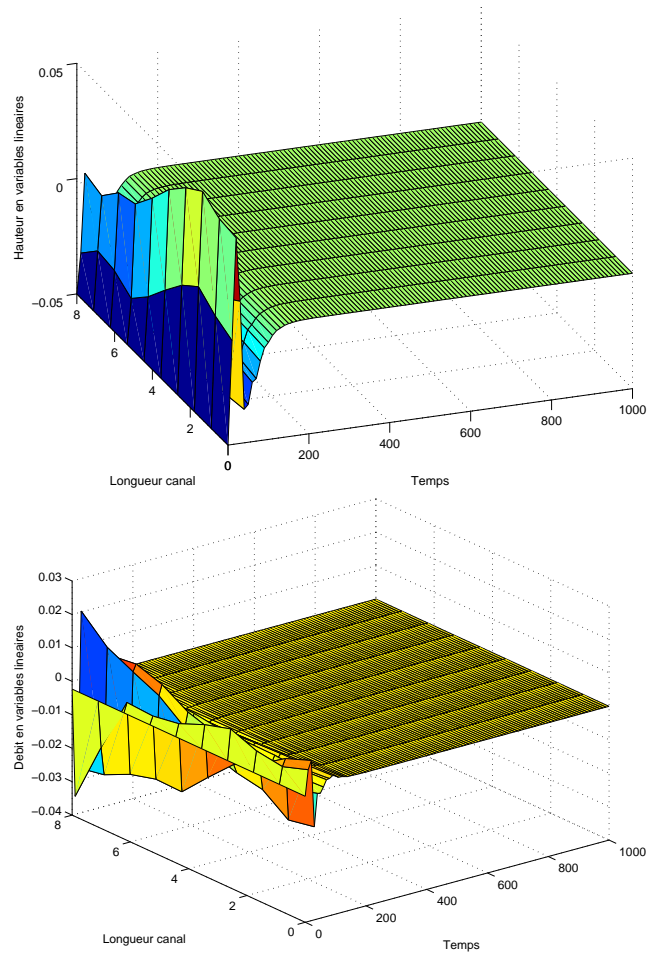


FIGURE 37 – Evolution de la hauteur [en haut] et du débit [en bas] (en var. linéaires) pour un compensateur dynamique durant 1000 secondes avec K calculée via la fonction "place"

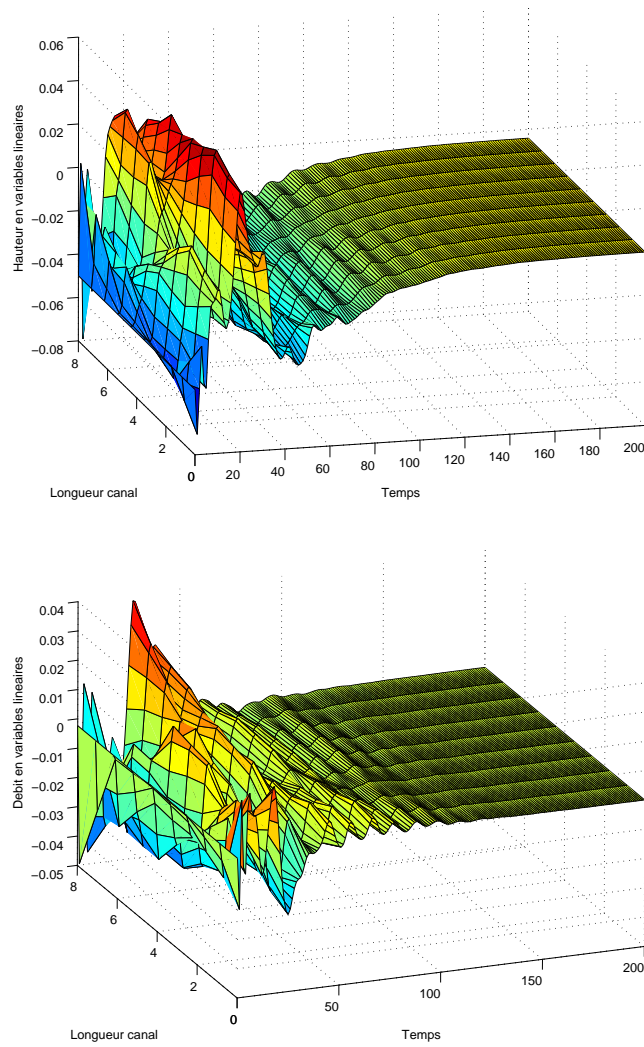


FIGURE 38 – Evolution de la hauteur [en haut] et du débit [en bas] (en var. linéaires) pour un compensateur dynamique durant 200 secondes avec K calculée via la fonction "lqr"

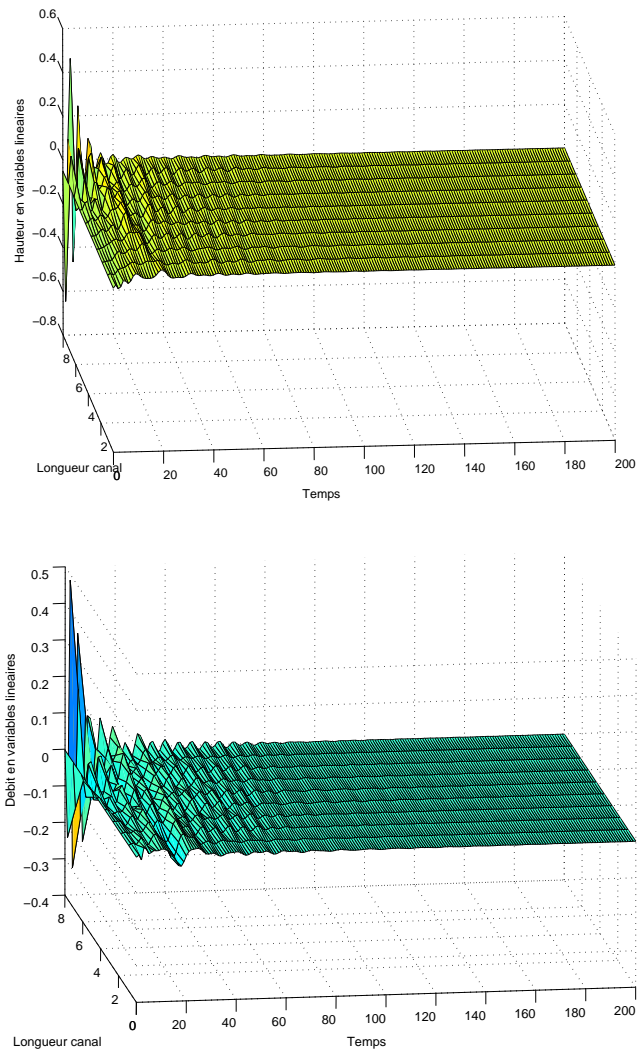


FIGURE 39 – Evolution de la hauteur [en haut] et du débit [en bas] (en var. linéaires) pour un compensateur dynamique durant 1000 secondes avec K calculée via la fonction "lqr"

- *Le contrôle $u(t)$*

Regardons à présent l'évolution du contrôle $u(t)$. Sur un intervalle de temps de 1000 secondes (cfr le graphique 40), nous voyons qu'il ne varie que sur les 100 premières secondes. Nous allons donc effectuer un zoom sur cette partie. Le graphique 41 nous montre l'évolution des composantes de u lorsque la matrice K est créée avec la fonction "place" tandis que le graphique 42 nous montre l'évolution pour K créée avec "lqr". Nous constatons un comportement similaire des courbes.

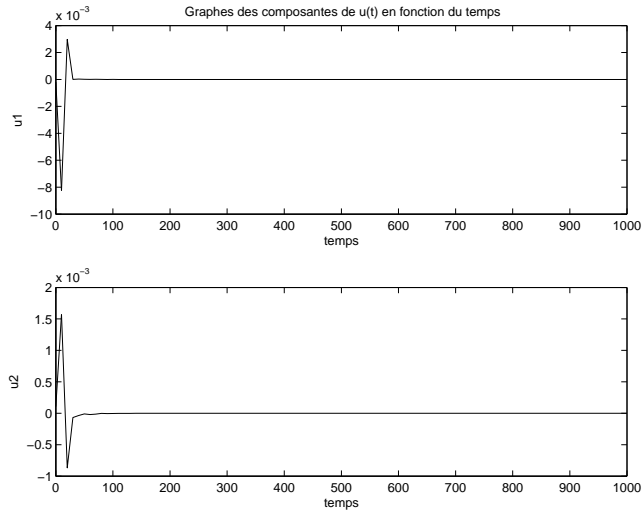


FIGURE 40 – Evolution du contrôle $u(t)$ sur un intervalle de temps de 1000 secondes quand K est calculée avec "place"

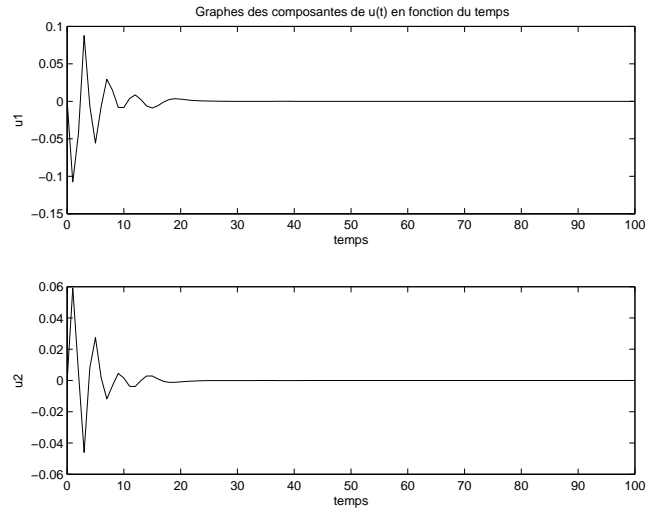


FIGURE 41 – Evolution du contrôle $u(t)$ sur un intervalle de temps de 100 secondes quand K est calculée avec "place"

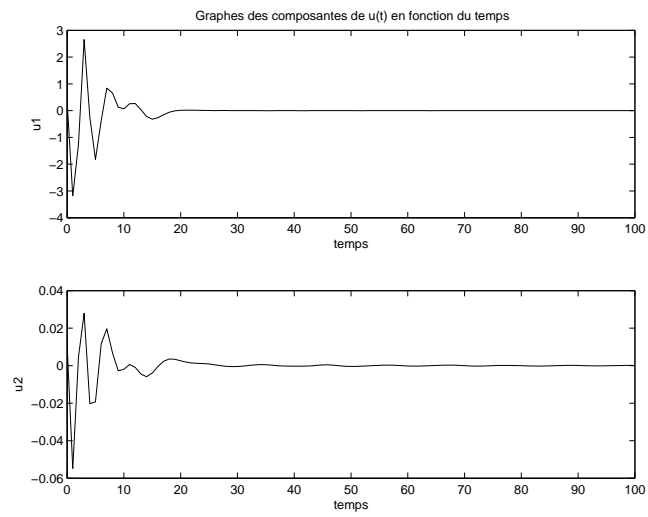


FIGURE 42 – Evolution du contrôle $u(t)$ sur un intervalle de temps de 100 secondes quand K est calculée avec "lqr"

3.7.3 Comparaison entre état réel et état estimé

Dans les deux sous-sections précédentes, nous avons stabilisé notre système de deux manières différentes : par feedback d'état réel puis par feedback d'état estimé grâce à l'estimateur créé. Nous allons à présent comparer les trajectoires obtenues à l'aide de graphiques. Le laps de temps choisi pour effectuer cette comparaison est de 1000 secondes, et l'erreur initiale choisie est de 10%. Nous commençons par regarder l'évolution de la hauteur et du débit pendant ce laps de temps et sur tout le canal. Cependant, il nous faut constater que sur les graphiques en 3 dimensions, il est assez difficile de distinguer les deux trajectoires. C'est pourquoi le graphe 45 compare les trajectoires à l'entrée et à la sortie du canal. Nous voyons ainsi qu'au départ les trajectoires de l'état réel et de l'état estimé sont bien distinctes pour ensuite se confondre assez rapidement. Les graphiques ayant été tracé avec K calculée via "place" puis avec "lqr" ont cependant un comportement similaire. Les temps de stabilisation semblent proches.

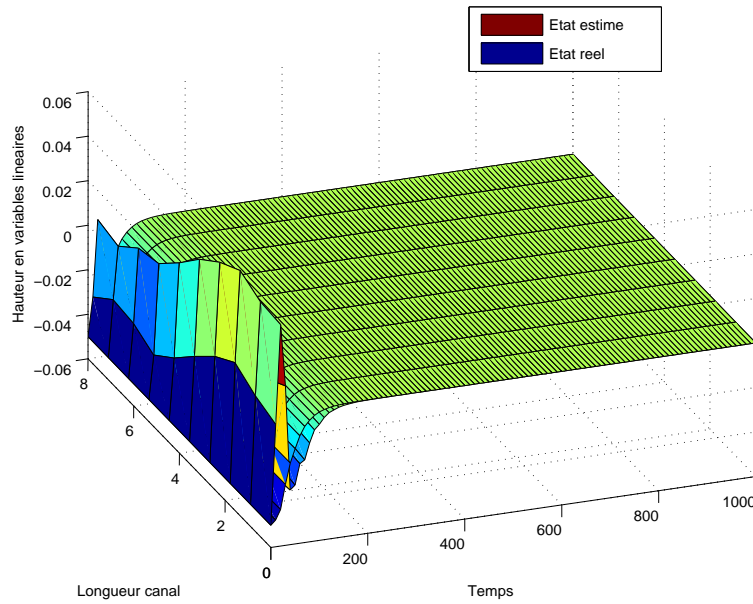


FIGURE 43 – Comparaison des trajectoires pour un laps de temps de 1000 secondes et sur tout le canal : la hauteur

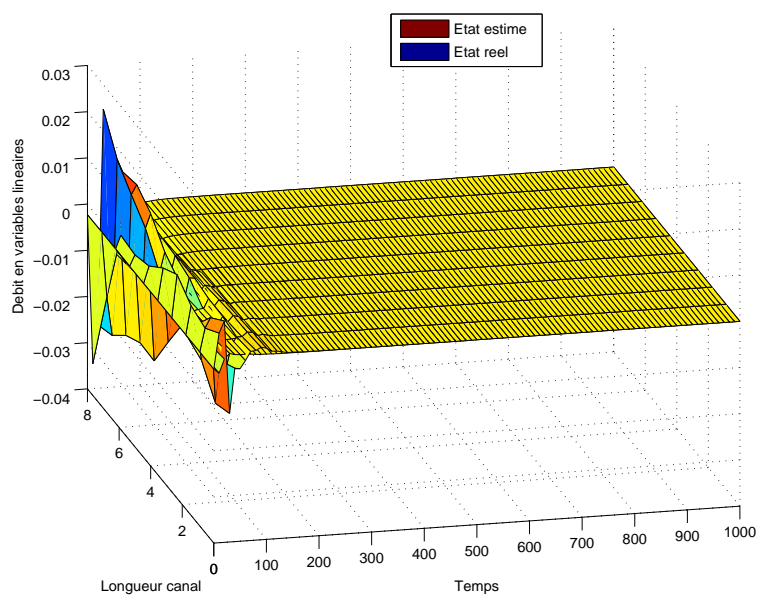


FIGURE 44 – Comparaison des trajectoires pour un laps de temps de 1000 secondes et sur tout le canal

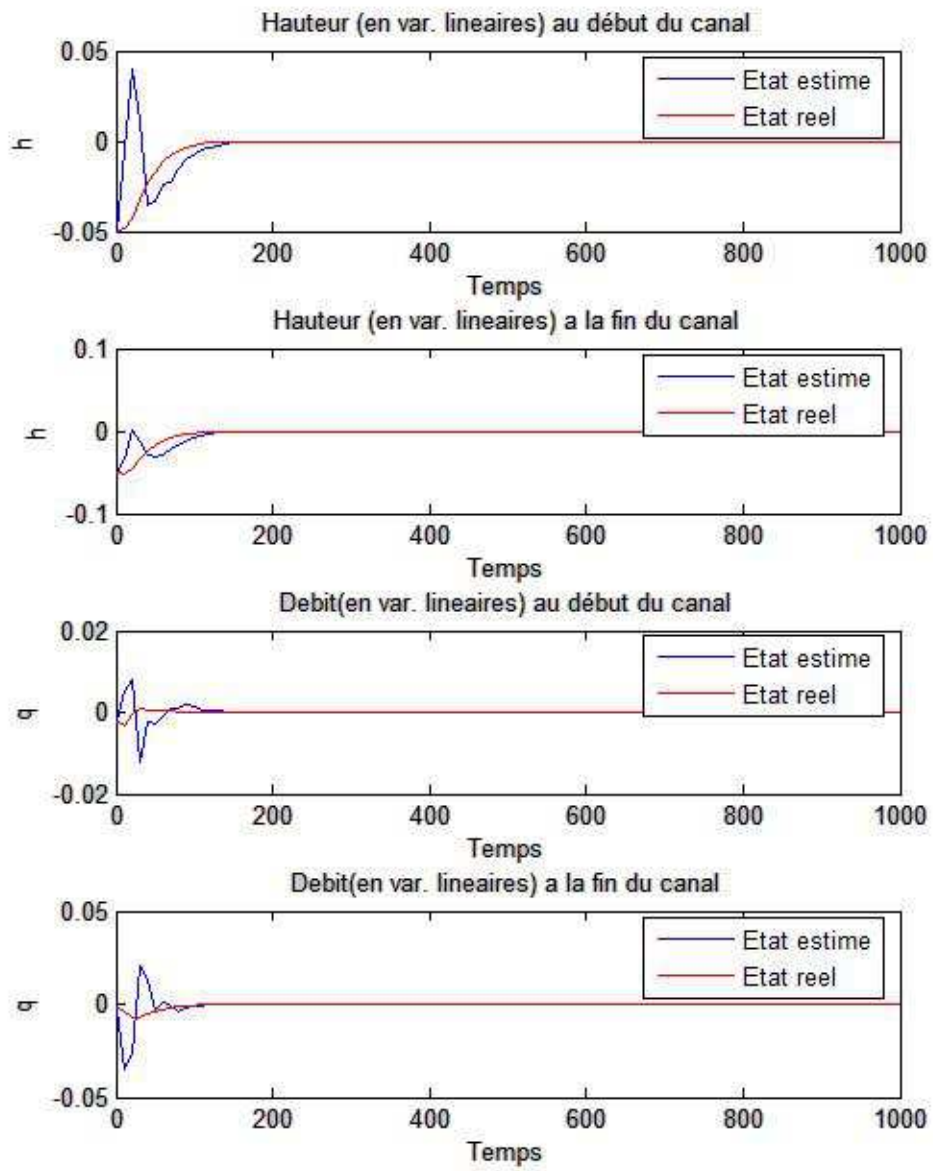


FIGURE 45 – Comparaison des trajectoires avec K calculée via "place"

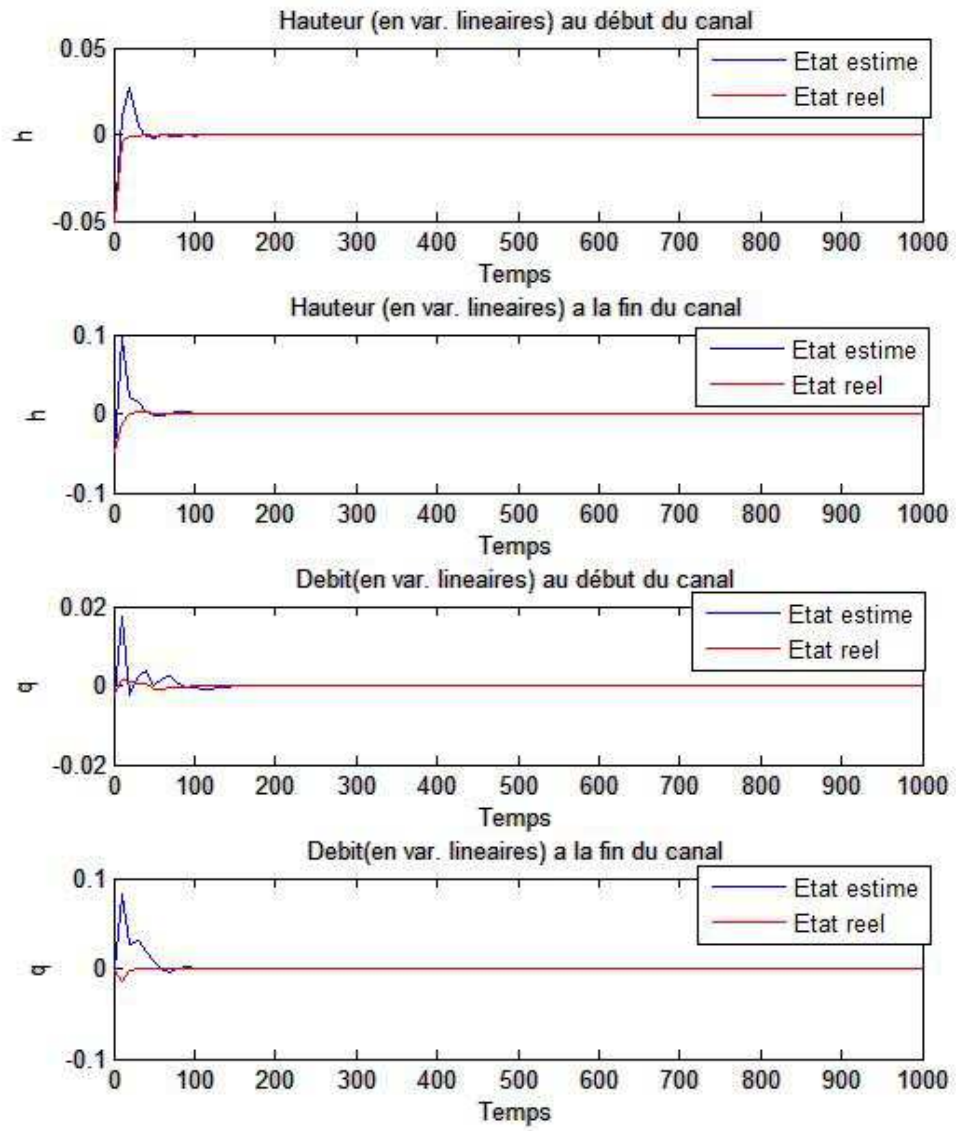


FIGURE 46 – Comparaison des trajectoires avec K calculée via "lqr"

3.8 Influence du choix de n

Nous avons effectué une analyse de notre système pour un choix de $n = 10$. Nous avons donc un système de dimension 20 qui était complètement contrôlable et complètement observable. Nous avons donc pu construire un contrôle $u(t)$ qui permettait de stabiliser ce système.

Nous allons maintenant regarder si les propriétés trouvées pour $n = 10$ sont conservées lorsqu'on augmente cette dimension. En fait, plus nous augmentons n , plus nous nous rapprochons du système réel. Voici un tableau qui nous donne le rang des matrices de contrôlabilité et d'observabilité ainsi que le nombre de valeurs propres de A qui sont négatives pour différentes dimensions testées. Pour rappel, la dimension du système est $2n$.

$2n$	$\text{Rg}[\mathcal{C}]$	$\text{Rg}[\mathcal{O}]$	Nbre val.p. < 0
10	10	10	6
20	20	20	10
30	30	30	16
40	32	31	21
80	18	18	40
200	14	14	100

Nous constatons que pour une dimension n peu élevée (c'est-à-dire inférieure à 15) nous conservons les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité. Mais lorsque la dimension augmente, nous voyons qu'elles disparaissent et que les systèmes obtenus sont de moins en moins observables et contrôlables. A présent, regardons si ce changement de dimension influence le comportement du système en boucle ouverte. Pour cela, nous allons nous baser sur les graphes suivants. Pour des valeurs de n de 50 ou 100, nous voyons que le comportement du système reste globalement le même tant au niveau des valeurs prises que des variations.

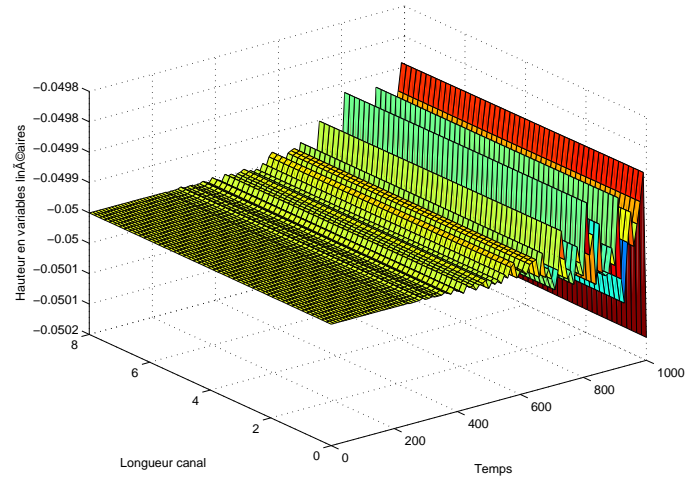


FIGURE 47 – Evolution de la hauteur d'eau pour une discrétisation de $n=50$

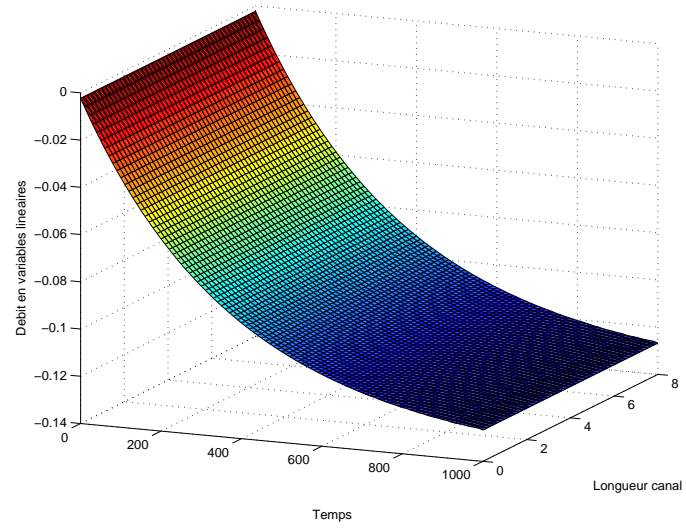


FIGURE 48 – Evolution du débit d'eau pour une discrétisation de $n=50$

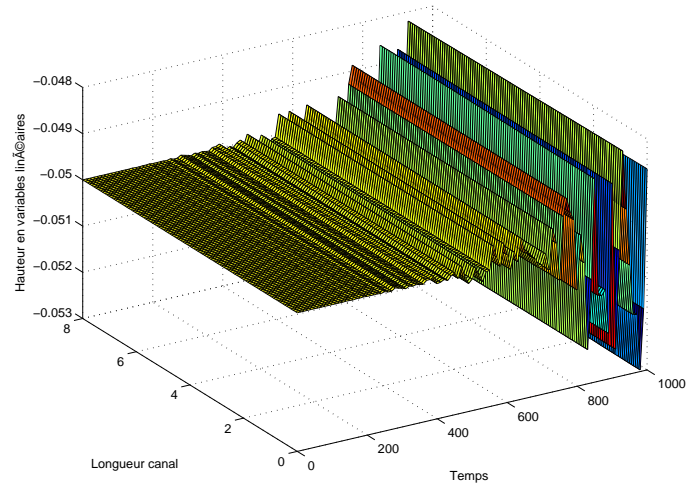


FIGURE 49 – Evolution de la hauteur d'eau pour une discrétisation de $n=100$

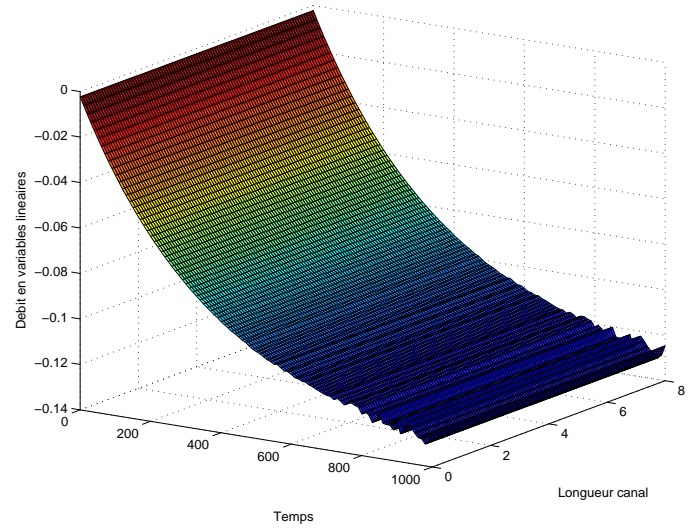


FIGURE 50 – Evolution du débit d'eau pour une discrétisation de $n=100$

Nous avons vu que pour une dimension plus élevée, la contrôlabilité et l'observabilité n'étaient plus assurées. Il va donc falloir regarder au niveau de la stabilisabilité et de la détectabilité, qui sont des conditions moins fortes, afin de déterminer si nous pouvons toujours contrôler le système. Pour ce faire, définissons les sous-espaces suivants :

- $\mathcal{L}^-(A)$ = sous espace stable engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres négatives,
- $\mathcal{L}^+(A)$ = sous espace instable engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres positives,
- $\mathcal{L}^0(A)$ = sous espace critique engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres nulles,

qui sont tels que $\mathcal{L}^-(A) \dot{+} \mathcal{L}^-(A) \dot{+} \mathcal{L}^0(A) = \mathbb{R}^n$.

Nous pouvons donc décomposer notre système R en une partie stable et une partie instable. Pour cela, posons V_- la base de $\mathcal{L}^-(A)$ et V_{0+} la base de $\mathcal{L}^{0+}(A) := \mathcal{L}^+(A) \cup \mathcal{L}^0(A)$. Modulo un changement de coordonnées T , nous pouvons donc écrire dans cette base :

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_- \\ x_{0+} \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ A &= \begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_{0+} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} B_- \\ B_{0+} \end{pmatrix} \\ C &= (C_- \ C_{0+}) \end{aligned}$$

où $A_- \in \mathbb{R}^{n_- \times n_-}$ et $A_{0+} \in \mathbb{R}^{n_{0+} \times n_{0+}}$.cas Cette écriture est possible car $\mathcal{L}^-(A)$ et $\mathcal{L}^{0+}(A)$ sont A-invariants.

Nous avons ainsi le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_- &= A_- x_- + B_- u \\ \dot{x}_{0+} &= A_{0+} x_{0+} + B_{0+} u \\ y &= C_- x_- + C_{0+} x_{0+} + Du. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi $R_{0+} := [A_{0+}, B_{0+}, C_{0+}, D_{0+}]$ la partie instable de R et $R_- = [A_-, B_-, C_-, D_-]$ la partie stable de R .

Enonçons à présent deux définitions de ces sous-espaces :

- (A, B) est stabilisable $\Leftrightarrow A$ est stable OU (A_{0+}, B_{0+}) est complètement

contrôlable,

- (C, A) est détectable $\Leftrightarrow A$ est stable OU (C_{0+}, A_{0+}) est complètement observable.

Afin d'effectuer ces calculs, nous allons utiliser Matlab en nous basant sur le théorème suivant :

Théorème 3.3 Représentation de A

Soient $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire,

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace A -invariant,

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le sous-espace complémentaire de S ,

i.e. $\mathbb{R}^n = S \dot{+} \Omega$ où $\dim S = k$ et $\dim \Omega = n - k$,

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible de la forme $T = [T_1 T_2]$ où $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times k}$ et $T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$,

les colonnes de T_1 forment une base de S et celles de T_2 une base de Ω ,

Alors T est un changement de coordonnées tel que :

$$x = T\tilde{x}$$

et

$$\tilde{A} := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}$$

où $\tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\tilde{A}_2 \in \mathbb{R}^{n-k \times n-k}$ et $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{k \times n-k}$

Matlab nous permet d'établir le tableau suivant qui reprend la dimension du système, la dimension du sous espace instable R_{0+} , le rang de la matrice de contrôlabilité du système R_{0+} ainsi que le rang de la matrice d'observabilité de R_{0+} .

2n	Dim. R_{0+}	Rg[\mathcal{C}_{0+}]	Rg[\mathcal{O}_{0+}]
40	20	20	20
50	24	24	24
60	30	30	22
80	40	24	22
100	50	22	20
200	100	16	16

Nous voyons que pour une dimension de 60 (c'est-à-dire pour $n = 30$), le système sera stabilisable. Et pour une dimension inférieure ou égale à 50, il sera également détectable. Au-delà de 60, il ne sera plus stabilisable.

Nous voyons donc que plus la dimension augmente, plus le système perd en contrôlabilité. De complètement contrôlable pour des dimensions inférieures à 30, il devient seulement stabilisable en dessous de 60. Mais au-delà, nous ne pouvons plus le contrôler. Cependant, il faut garder en tête que ce ne sont pas des chiffres généraux, mais qui proviennent du choix de ce système avec ses paramètres. De plus, il est envisageable d'obtenir une plus grande détectabilité en augmentant le nombre de variables de sortie.

4 Analyse d'un cas à conditions initiales non-uniformes

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas d'un canal dont l'état initial n'est pas uniforme, c'est-à-dire que la hauteur et le débit en chacun de ses points sont différents en $t = 0$. L'analyse effectuée sera semblable à celle effectuée dans le chapitre précédent afin de voir si, avec un changement de conditions initiales, les méthodes de contrôle utilisées précédemment restent valables.

4.1 Choix des paramètres et des conditions

Commençons par regarder les différentes valeurs données pour les paramètres. Ces valeurs nous sont données par l'article [1]. Elles proviennent du micro-canal de Valence.

- $L = 7m$,
- $c = 0$,
- $K = 97m^{1/3}/s$,
- $I = 0.0006m/m$.

Les conditions initiales nous sont données par :

- $Q(0,0) = 10m^3/s$,
- $H(0,0) = 3.404m$,
- $H(L,0) = 6.231m$.

De ce fait, nous allons donc considérer une hauteur initiale calculée comme une droite allant de 0 à L puisque nous ne connaissons que ces deux valeurs. Le débit est aussi considéré comme variant sur la longueur du canal. Pour ce faire, nous savons que $Q(x,t) = H(x,t)V$ où V représente la vitesse. Nous allons donc calculer le débit à chaque point de discrétisation par cette formule.

Enfin, les valeurs pour l'état d'équilibre nous sont données par :

- $Q_0 = 13.125m^3/s$,
- $H_0(x=0) = 3.56m$,
- $H_0(x=L) = 6.38m$.

Il s'agit d'un équilibre qui n'est pas uniforme, nous allons donc calculer le profil d'équilibre avec la formule (26) et Matlab.

Nous souhaitons obtenir comme sortie la hauteur au début du canal $H(0,t)$ et le débit à la sortie du canal $Q(L,t)$. Nous aurons donc un vecteur $y(t)$ de la forme :

$$y(t) = \begin{pmatrix} H(x_1,t) \\ Q(x_n,t) \end{pmatrix}.$$

Les conditions frontières nous sont données par la dérivée par rapport au temps de la hauteur à la fin et du débit au début du canal :

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h(L, t) \\ q(0, t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H(x_n, t) \\ Q(x_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Les matrices B et C seront donc les mêmes que dans le chapitre précédent. Ces valeurs et ces matrices seront utilisées tout au long de cette section.

4.2 Stabilité interne et stabilité externe

La stabilité interne est donnée par les valeurs propres de la matrice A . Les voici :

valeurs propres =

```
-0.0012 + 1.5411i
-0.0012 - 1.5411i
 0.0006 + 1.5000i
 0.0006 - 1.5000i
-0.0012 + 1.2537i
-0.0012 - 1.2537i
 0.0006 + 1.2192i
 0.0006 - 1.2192i
 0.0003 + 0.7831i
 0.0003 - 0.7831i
-0.0010 + 0.8142i
-0.0010 - 0.8142i
-0.0004 + 0.2813i
-0.0004 - 0.2813i
-0.0050 + 0.1642i
-0.0050 - 0.1642i
 0.0068 + 0.0256i
 0.0068 - 0.0256i
-0.0000
-0.0013
```

Sur les 20 valeurs propres, seules 12 sont à partie réelle négative. Le système n'est donc pas internement stable.

Au niveau de la stabilité externe, reprenons le dénominateur de la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} & s^{20} + 0.002438s^{19} + 9.066s^{18} + 0.01589s^{17} + 32.99s^{16} \\ & + 0.03535s^{15} + 61.56s^{14} + 0.02312s^{13} + 62.27s^{12} \\ & - 0.02264s^{11} + 33.07s^{10} - 0.04005s^9 + 8.074s^8 \\ & - 0.01905s^7 + 0.6006s^6 - 0.003044s^5 + 0.01119s^4 - 0.0001294s^3 \\ & + 7.391e - 006s^2 + 9.932e - 009s + 5.142e - 021 \end{aligned}$$

dont les racines sont :

Racines =

```
-0.0012 + 1.5411i
-0.0012 - 1.5411i
 0.0006 + 1.5000i
 0.0006 - 1.5000i
-0.0012 + 1.2537i
-0.0012 - 1.2537i
 0.0006 + 1.2192i
 0.0006 - 1.2192i
 0.0003 + 0.7831i
 0.0003 - 0.7831i
-0.0010 + 0.8142i
-0.0010 - 0.8142i
-0.0004 + 0.2813i
-0.0004 - 0.2813i
-0.0050 + 0.1642i
-0.0050 - 0.1642i
 0.0068 + 0.0256i
 0.0068 - 0.0256i
-0.0000
-0.0013
```

Le système n'est donc pas extérieurement stable non plus, puisque certaines racines sont positives.

4.3 Contrôlabilité et observabilité

La contrôlabilité et l'observabilité du système nous serons, comme dans le chapitre précédent, données par le rang des matrices de contrôlabilité et

d'observabilité. Celles-ci, ainsi que leur rang, sont calculés par Matlab.

Rang matrice de controlabilite =

20

Rang matrice d'observabilite =

20

Nous voyons que chaque matrice est de rang plein, le système est donc complètement observable et complètement contrôlable.

4.4 Tests dynamiques en boucle ouverte

Nous allons observer l'évolution du système linéaire en boucle ouverte, avec $u = 0$, via ses trajectoires d'état sur différents intervalles de temps : 20, 150 et 1000 secondes. Au-delà de cet intervalle de temps, les valeurs prises par le système deviennent improbables.

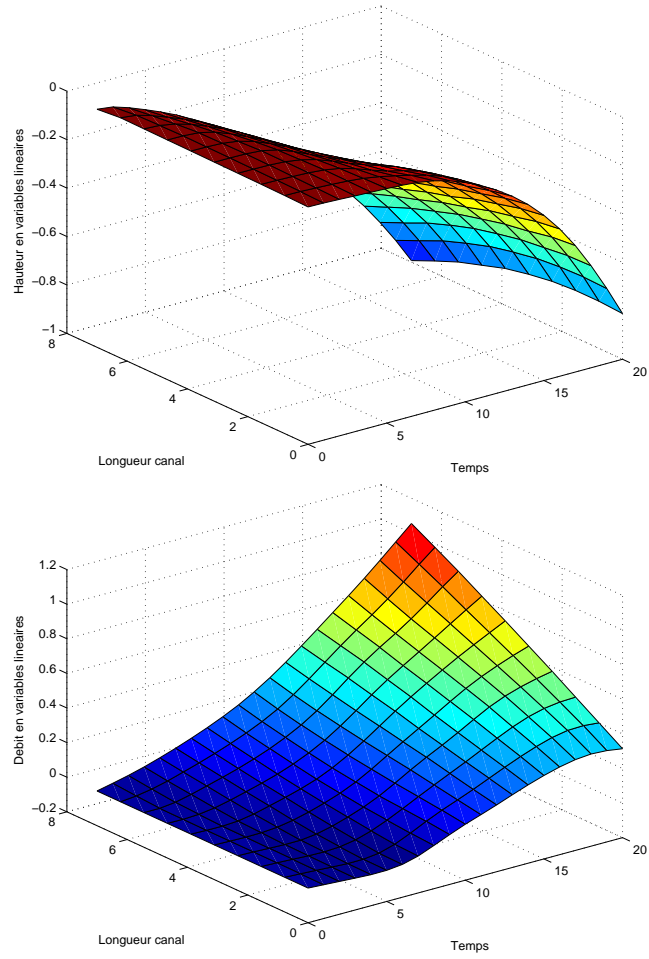


FIGURE 51 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires durant 20 secondes

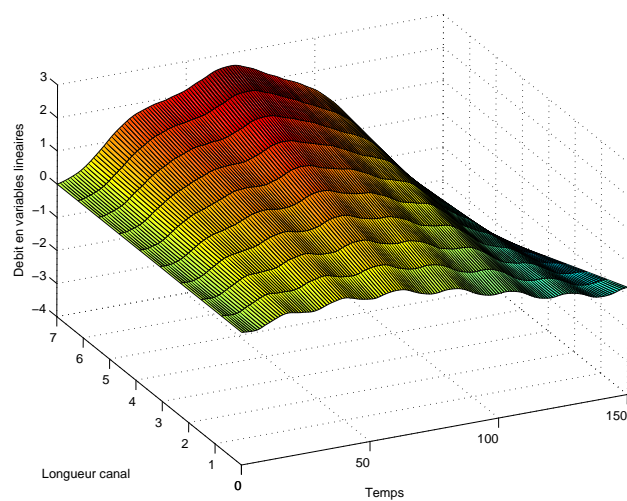
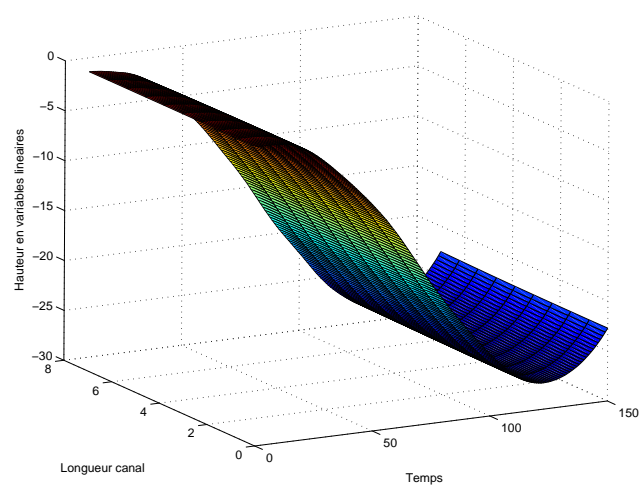


FIGURE 52 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires durant 150 secondes

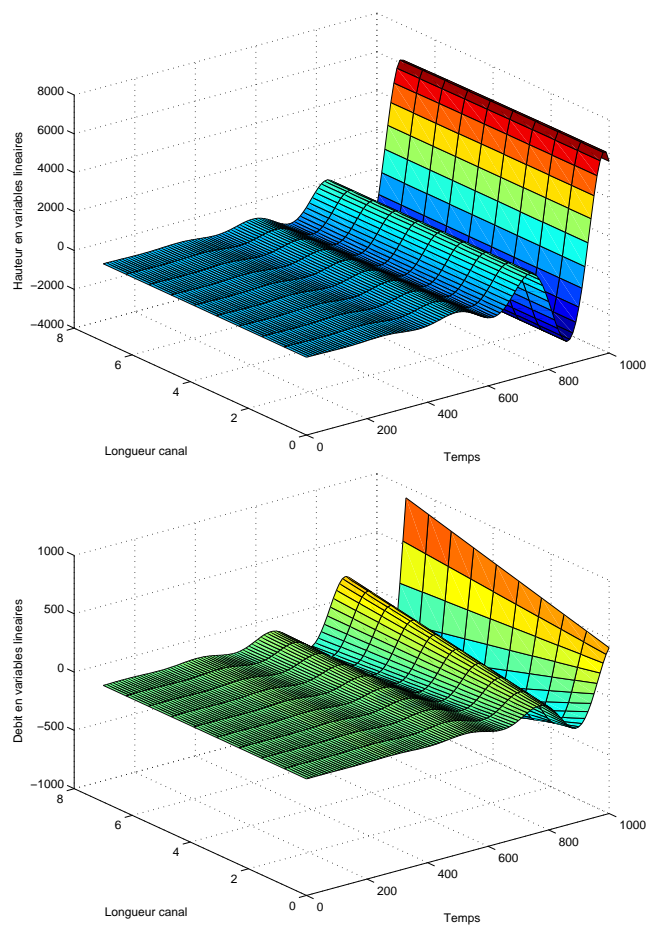


FIGURE 53 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires durant 1000 secondes

4.5 Réponse impulsionnelle et indicielle

La réponse impulsionnelle correspond à une entrée brève mais d'intensité élevée. Dans notre cas, il s'agit donc d'une variation élevée et brève de la hauteur d'eau à la fin du canal ainsi qu'une variation du débit au début du canal. Nous voyons que les valeurs atteintes par les variables de sortie (hauteur d'eau à l'entrée du canal et débit d'eau à la fin du canal) sont improbables : elles sont de l'ordre de 1000 alors que nous travaillons avec des valeurs de l'ordre de 0.1 . Nous pouvons tout de même remarquer que la variation du débit au début du canal (Input 2) ne provoque pas de grand changement sur les sorties du système. Contrairement à la variation de la hauteur d'eau à la fin du canal qui semble provoquer des grandes variations du débit et de la hauteur d'eau.

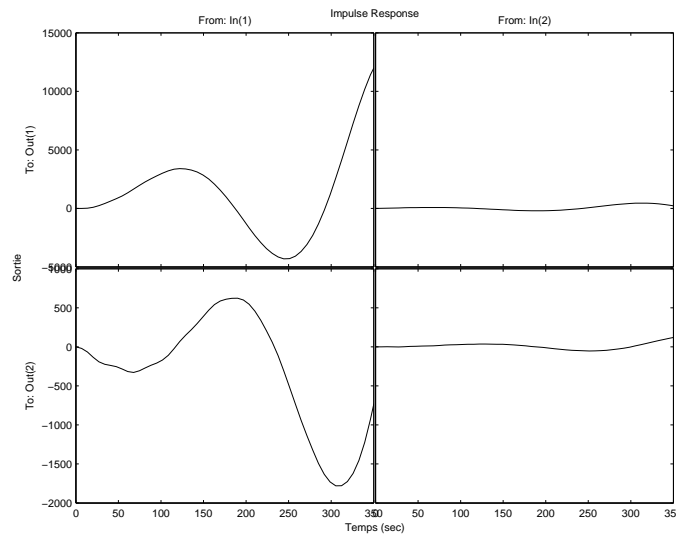


FIGURE 54 – Réponse impulsionnelle

Au niveau de la réponse indicielle, qui correspond à des variations continues des variables d'entrée, les valeurs atteintes sont elles aussi improbables. Nous constatons le même comportement que pour la réponse impulsionnelle, c'est-à-dire que la deuxième entrée garde les sorties plus ou moins constantes.

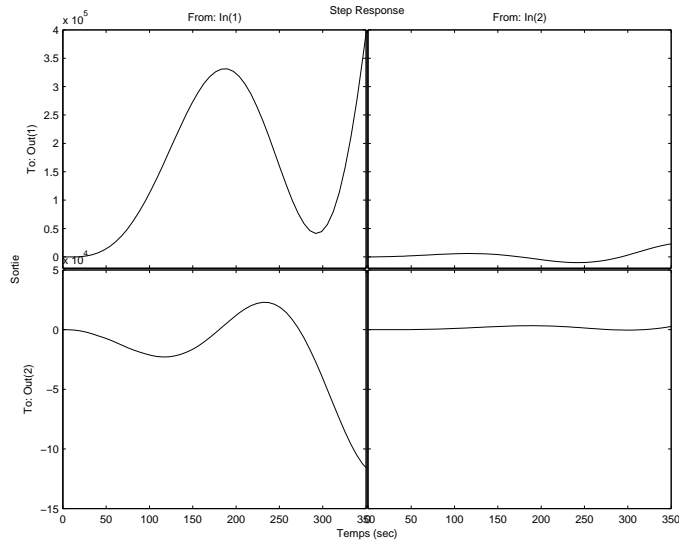


FIGURE 55 – Réponse indicielle

4.6 Contrôle linéaire

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les méthodes de contrôle linéaire déjà utilisées dans le chapitre précédent : l'asservissement d'état réel calculé de deux manières possibles (à l'aide des fonctions "place" et "lqr") et l'asservissement dynamique d'état estimé afin de créer un contrôle $u(t) = Kx(t) + v(t)$ qui stabilisera le système. Il s'agit d'observer si les méthodes utilisées dans un cas à conditions initiales uniformes fonctionnent aussi dans le cas de conditions initiales non-uniformes.

4.6.1 Contrôle par asservissement d'état réel

Dans un premier temps, observons les graphes obtenus à l'aide de la fonction "place" qui permet de construire une matrice K en assignant les valeurs propres de notre choix à la matrice $A + BK$. Le choix des valeurs propres est celui des valeurs propres de A diminuées de 0.5 . Nous obtenons les graphes suivants. Les variations possèdent des valeurs probables.

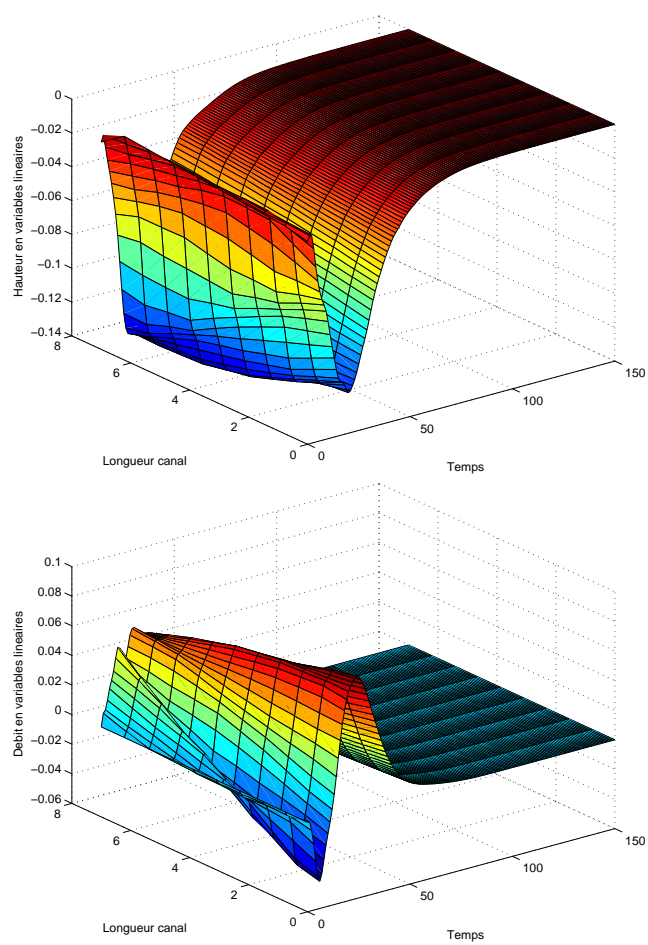


FIGURE 56 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à un contrôle créé avec la fonction "place"

Les graphes suivants ont été créés avec la fonction "lqr". Nous constatons que les graphes obtenus sont plus oscillants que ceux créés avec la fonction "place". Cependant, quelle que soit la fonction utilisée, nous arrivons bien à une stabilisation du système.

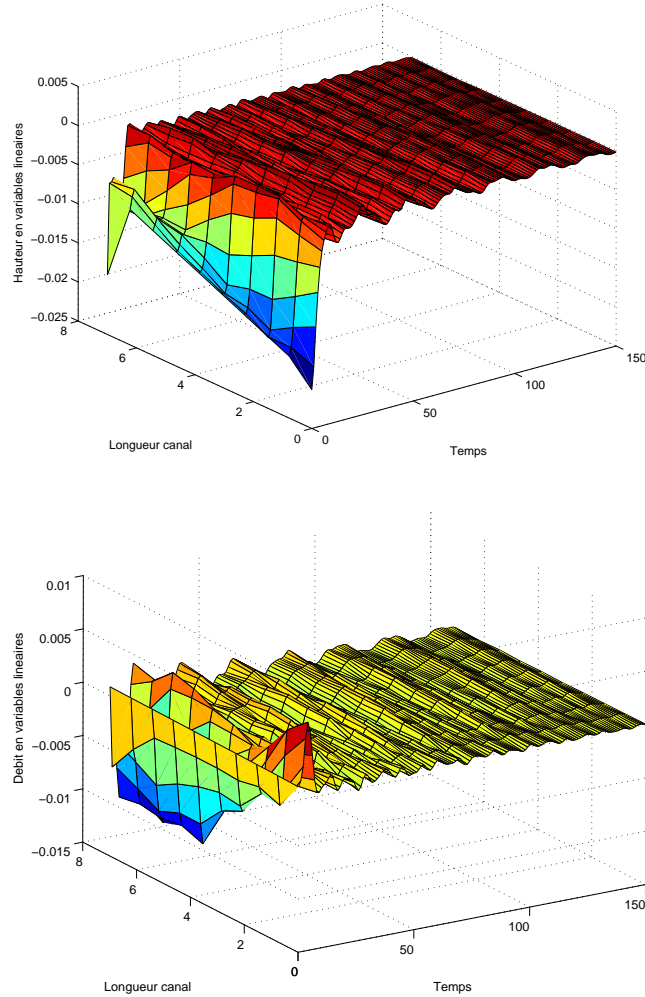


FIGURE 57 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à un contrôle créé avec la fonction "lqr"

Le contrôle u

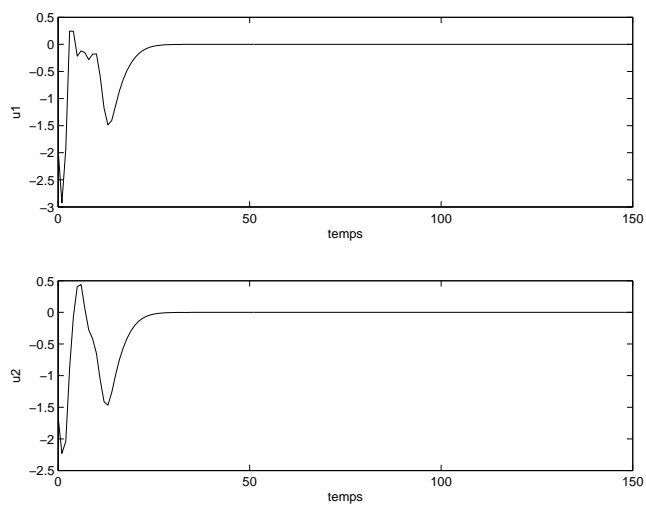


FIGURE 58 – Evolution des deux composantes de u avec une matrice K créée avec la fonction 'place'

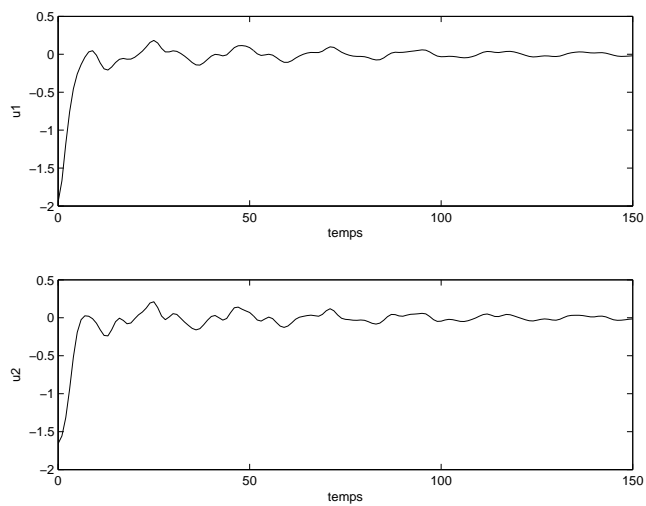


FIGURE 59 – Evolution des deux composantes de u avec une matrice K créée avec la fonction 'lqr'

4.6.2 Contrôle par compensation dynamique de l'état estimé

A présent, il s'agit de créer un estimateur d'état afin d'arriver à une estimation dynamique de l'état estimé.

Estimation d'état par injection de sortie

La matrice L est créée à l'aide de la fonction "place" en diminuant les valeurs propres de A de 0.8 afin d'obtenir que la matrice $A + LC$ soit plus stable que $A + BK$. Nous pouvons ainsi calculer les trajectoires d'erreur $e(t) = e^{(A+LC)t}e_0$ où l'erreur initiale e_0 est de 10%.

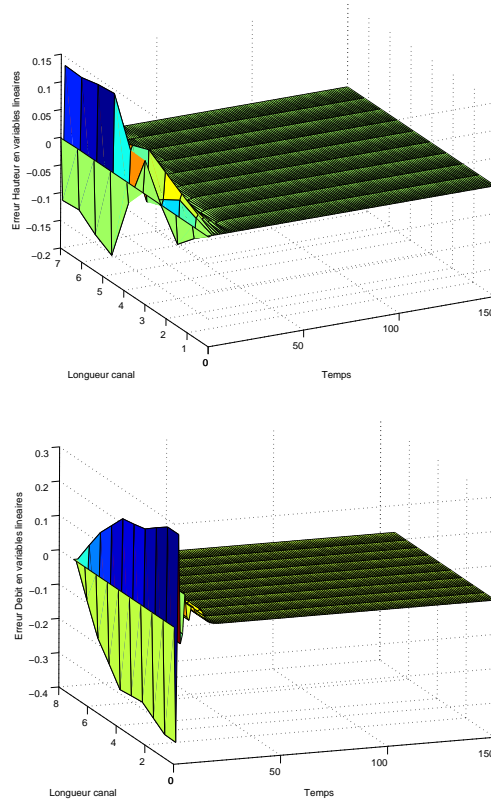


FIGURE 60 – Evolution de l'erreur sur la hauteur [graphe du haut] et sur le débit [graphe du bas] en variables linéaires

Asservissement de l'état estimé

Les graphiques suivants représentent l'évolution du système soumis à un asservissement dynamique de l'état estimé. La matrice A est, dans le premier graphique, créé avec la fonction "place". Nous observons des variations dans un premier temps mais le système se stabilise assez rapidement.

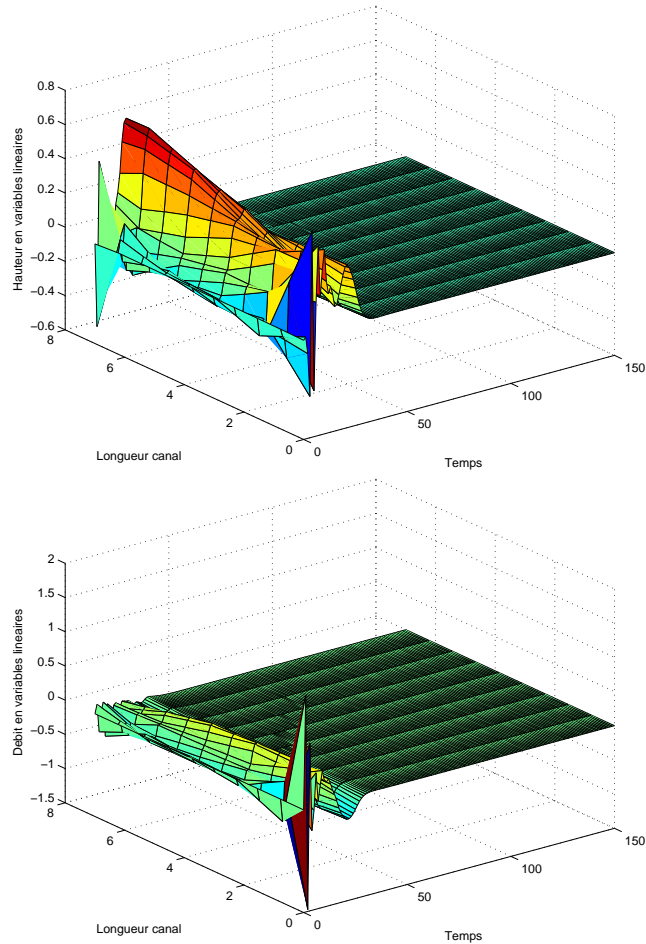


FIGURE 61 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à un contrôle d'état estimé créé avec la fonction "place"

Avec la fonction "lqr" pour créer la matrice K , nous observons toujours des oscillations, mais le système se stabilise très rapidement.

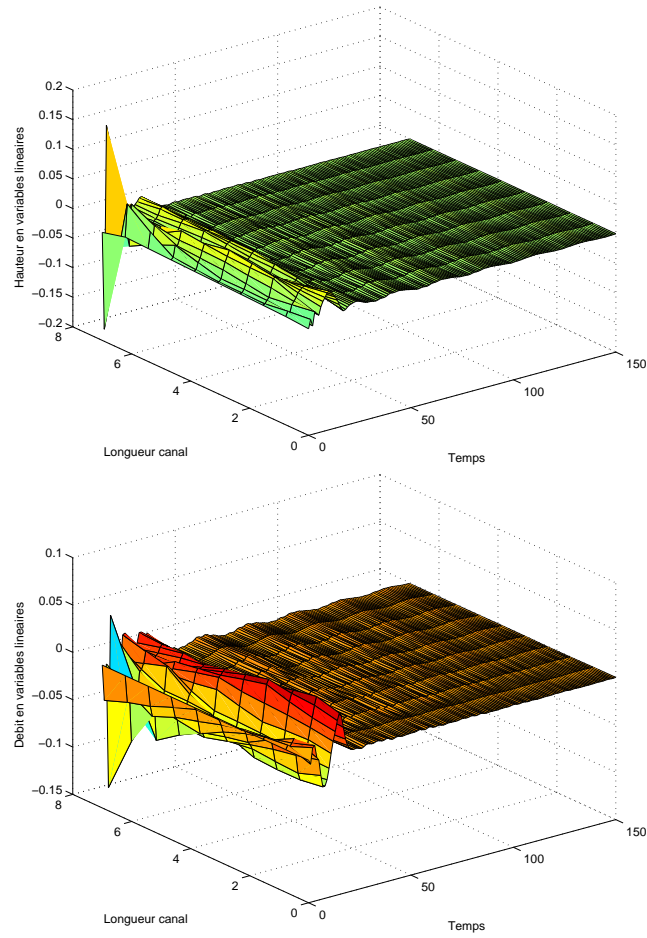


FIGURE 62 – Evolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à un contrôle d'état estimé créé avec la fonction "lqr"

4.6.3 Comparaison entre état réel et état estimé

Les graphiques suivants vont servir à comparer les trajectoires d'état du système selon l'asservissement choisi. Ils nous permettent de constater que, quel que soit l'asservissement utilisé, les deux trajectoires se stabilisent et se confondent assez vite.

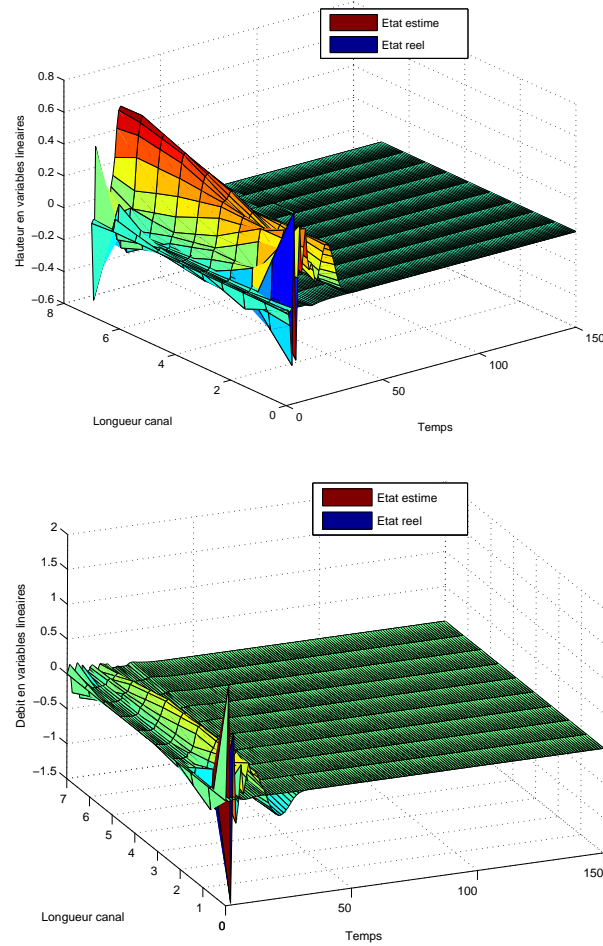


FIGURE 63 – Comparaison de l'évolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à des contrôles créés avec la fonction "place"

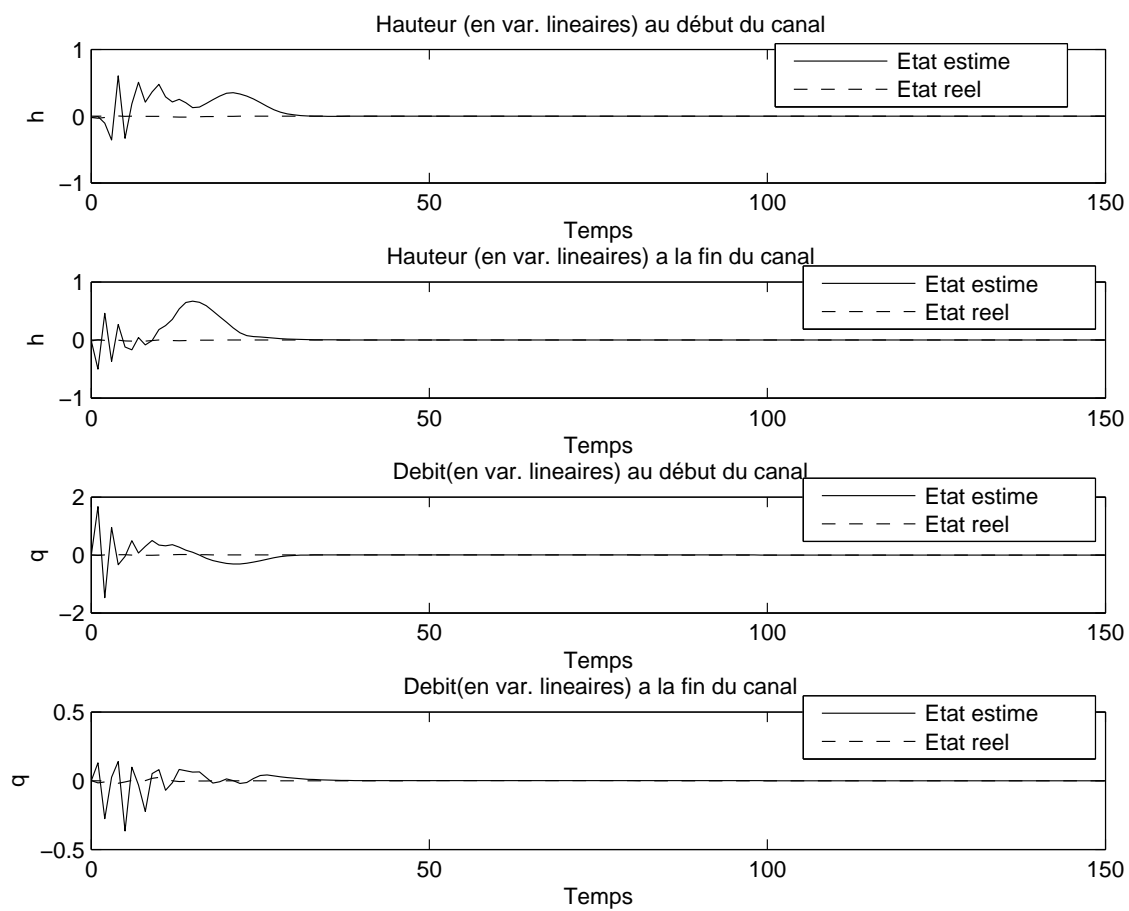


FIGURE 64 – Comparaison de l'évolution de la hauteur et du débit à l'entrée et à la sortie du canal, k créée avec "place"

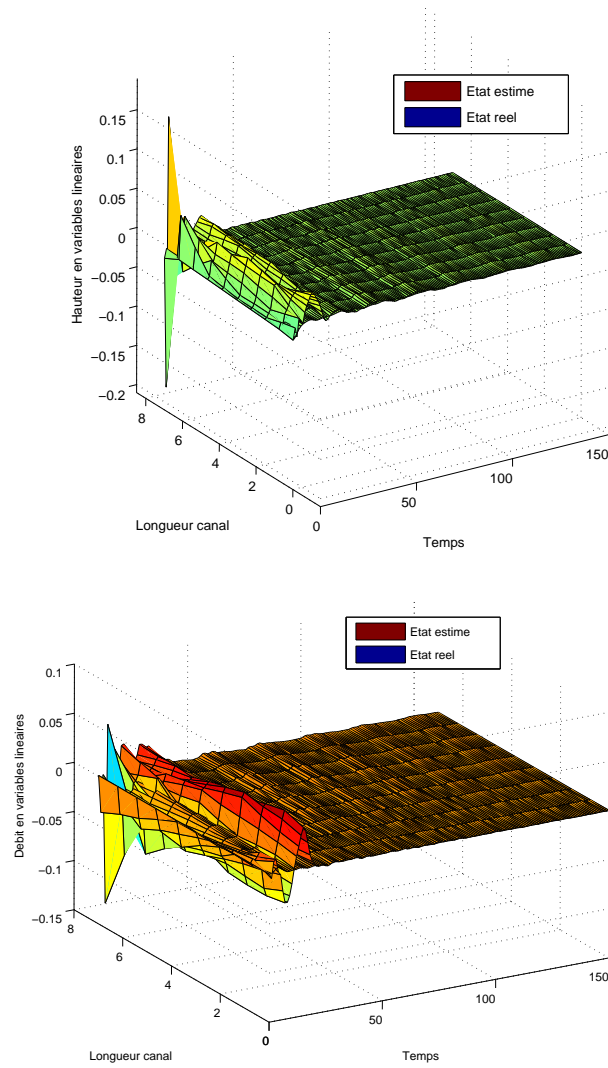


FIGURE 65 – Comparaison de l'évolution de la hauteur [graphe du haut] et du débit [graphe du bas] en variables linéaires soumis à des contrôles créés avec la fonction "lqr"

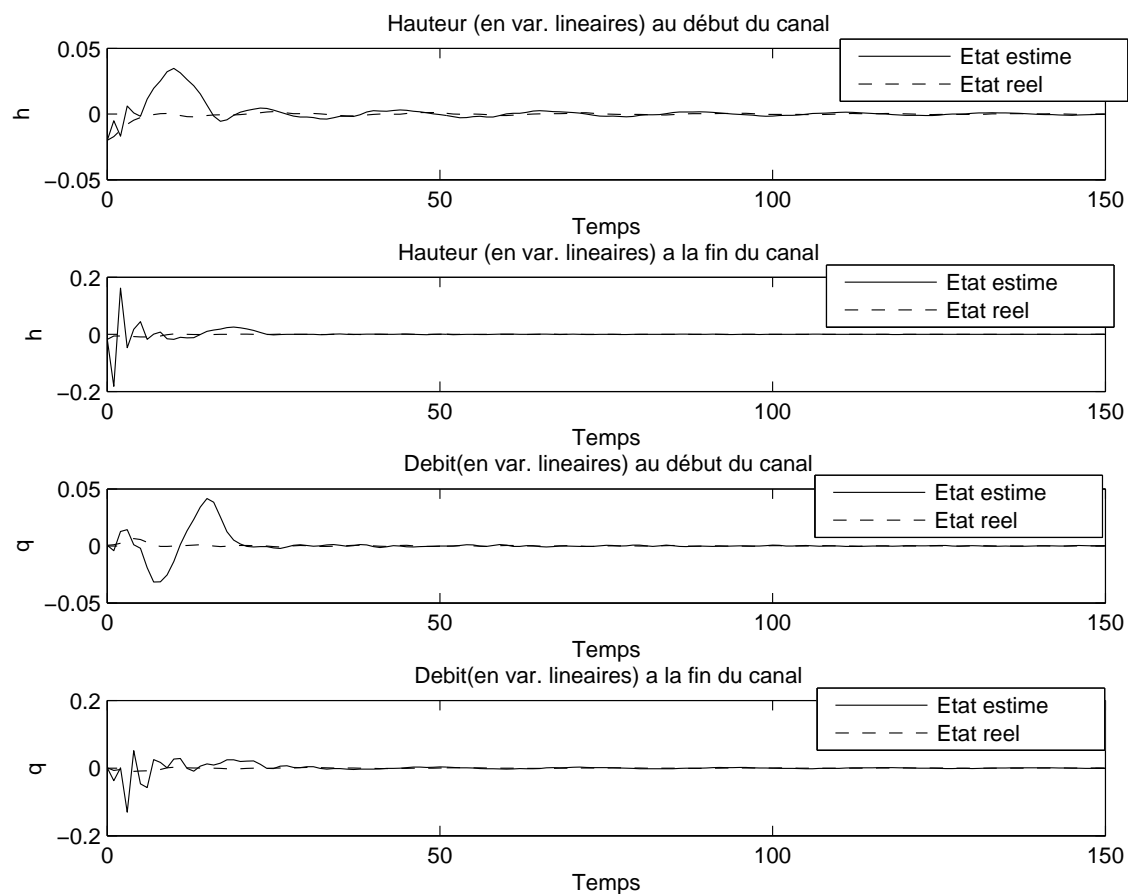


FIGURE 66 – Comparaison de l'évolution de la hauteur et du débit à l'entrée et à la sortie du canal, K créée avec "lqr"

4.7 Influence du choix de n

Nous constatons le même comportement que pour le cas précédent : à partir d'une dimension 30, le système n'est plus observable ni contrôlable.

$2n$	$\text{Rg}[\mathcal{C}]$	$\text{Rg}[\mathcal{O}]$	Nbre val.p. < 0
10	10	10	6
20	20	20	10
30	30	30	19
40	22	22	24
80	18	18	46
200	13	13	112

$2n$	$\text{Dim. } R_{0+}$	$\text{Rg}[\mathcal{C}_{0+}]$	$\text{Rg}[\mathcal{O}_{0+}]$
40	16	16	16
50	19	19	19
60	24	24	22
80	34	22	21

Ici encore, nous voyons qu'à partir d'une certaine dimension, le système n'est plus stabilisable ni détectable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons, pour commencer, étudié les équations de Saint-Venant en nous basant sur [2]. Nous les avons ensuite linéarisées et discrétisées spatialement afin de pouvoir les étudier à l'aide de méthodes de contrôle linéaire. Enfin, nous sommes passés à l'analyse et au contrôle de systèmes particuliers, différenciés par leurs conditions initiales (uniformes ou non-uniformes) basés sur les articles [1], [4] et [5]. Ces articles ont fournis des paramètres numériques recueillis sur des canaux expérimentaux nécessaires à l'analyse et au contrôle. Par cette analyse, nous avons pu constater que, dans le cas de nos systèmes, il existe une discrétisation maximale au-delà de laquelle le système n'est plus stabilisable. Cependant, si nous restons en dessous de cette discrétisation maximale, les méthodes utilisées semblent bien fonctionner et nous obtenions un système régulé assez rapidement.

Dans une approche future, il pourrait être intéressant d'utiliser des paramètres réels (c'est-à-dire recueillis sur des rivières par exemple) plutôt que des paramètres provenant de canaux expérimentaux afin d'observer l'influence sur la discrétisation maximale possible. De même, il pourrait être intéressant d'observer l'influence du choix des entrées et des sorties sur cette discrétisation maximale.

Nous pourrions aussi envisager de travailler avec un modèle moins simplifié. En effet, les hypothèses posées pour obtenir le modèle des équations de Saint-Venant sont assez nombreuses, il serait donc intéressant de réduire ces hypothèses et de voir de quelle manière le système est influencé, puisqu'il serait ainsi plus proche du système réel.

Une autre perspective serait de repasser en système non-linéaire afin d'observer l'influence d'un contrôle créé sur un système linéaire discrétisé. Cela nécessiterait cependant d'utiliser des méthodes numériques plus complexes afin de résoudre le système non linéaire.

Une dernière remarque concerne le programme utilisé pour effectuer les calculs et les graphiques. Il a été spécialement conçu dans le but d'étudier les deux systèmes proposés dans ce mémoire. Il serait donc envisageable de l'adapter pour analyser tous types de canaux ainsi que le rendre plus performant (au niveau précision ou temps d'exécution).

Annexe

Dans cette annexe se trouvent l'expression de la fonction de transfert pour le premier cas étudié ainsi que le code Matlab utilisé pour cette étude. Celui-ci est divisé en un code principal et trois fonctions qui permettent de calculer les trajectoires d'état, d'erreur et de les comparer.

Fonction de transfert pour le cas du système à conditions initiales uniformes

Transfer function from input 1 to output...

$$\begin{aligned} & -0.006536 s^{10} - 0.0007929 s^9 - 0.01169 s^8 - 0.001441 s^7 - 0.005716 s^6 - 0.0007566 s^5 \\ & - 0.0006578 s^4 - 0.0001106 s^3 - 6.77e-07 s^2 - 1.835e-06 s - 5.069e-09 \end{aligned}$$

#1: -----

$$\begin{aligned} & s^{20} + 0.02763 s^{19} + 4.84 s^{18} + 0.124 s^{17} + 9.421 s^{16} + 0.2191 s^{15} + 9.446 s^{14} \\ & + 0.1948 s^{13} + 5.185 s^{12} + 0.09227 s^{11} + 1.525 s^{10} + 0.02262 s^9 + 0.2168 s^8 \\ & + 0.002547 s^7 + 0.01149 s^6 + 0.0001038 s^5 + 0.0001971 s^4 + 1.088e-06 s^3 \\ & + 1.503e-09 s^2 + 5.286e-22 s + 7.349e-24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1.094 s^{18} + 0.03465 s^{17} - 5.281 s^{16} + 0.1352 s^{15} - 10.25 s^{14} + 0.2078 s^{13} \\ & - 10.25 s^{12} + 0.1587 s^{11} - 5.6 s^{10} + 0.06257 s^9 - 1.636 s^8 + 0.01176 s^7 \\ & - 0.2301 s^6 + 0.0008728 s^5 - 0.01187 s^4 - 8.437e-05 s^3 - 0.0002044 s^2 \\ & - 7.322e-07 s - 1.368e-08 \end{aligned}$$

#2: -----

$$\begin{aligned} & s^{20} + 0.02763 s^{19} + 4.84 s^{18} + 0.124 s^{17} + 9.421 s^{16} + 0.2191 s^{15} + 9.446 s^{14} \\ & + 0.1948 s^{13} + 5.185 s^{12} + 0.09227 s^{11} + 1.525 s^{10} + 0.02262 s^9 + 0.2168 s^8 \\ & + 0.002547 s^7 + 0.01149 s^6 + 0.0001038 s^5 + 0.0001971 s^4 + 1.088e-06 s^3 \\ & + 1.503e-09 s^2 + 5.286e-22 s + 7.349e-24 \end{aligned}$$

Transfer function from input 2 to output...

$$\begin{aligned} & 1.25 s^{18} + 0.1023 s^{17} + 6.057 s^{16} + 0.4337 s^{15} + 11.81 s^{14} + 0.7254 s^{13} + 11.86 s^{12} \\ & + 0.6087 s^{11} + 6.519 s^{10} + 0.2696 s^9 + 1.922 s^8 + 0.06045 s^7 + 0.2744 s^6 \\ & + 0.006008 s^5 + 0.01466 s^4 + 9.176e-05 s^3 + 0.0002461 s^2 + 6.797e-07 s \\ & - 5.084e-19 \end{aligned}$$

#1: -----

$$\begin{aligned} & s^{20} + 0.02763 s^{19} + 4.84 s^{18} + 0.124 s^{17} + 9.421 s^{16} + 0.2191 s^{15} + 9.446 s^{14} \\ & + 0.1948 s^{13} + 5.185 s^{12} + 0.09227 s^{11} + 1.525 s^{10} + 0.02262 s^9 + 0.2168 s^8 \\ & + 0.002547 s^7 + 0.01149 s^6 + 0.0001038 s^5 + 0.0001971 s^4 + 1.088e-06 s^3 \\ & + 1.503e-09 s^2 + 5.286e-22 s + 7.349e-24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0.008285 s^{10} + 0.000819 s^9 + 0.01576 s^8 + 0.001478 s^7 + 0.008629 s^6 + 0.0007699 s^5 \\ & + 0.001313 s^4 + 0.0001116 s^3 + 2.279e-05 s^2 + 1.834e-06 s - 4.644e-20 \end{aligned}$$

#2: -----

$$\begin{aligned} & s^{20} + 0.02763 s^{19} + 4.84 s^{18} + 0.124 s^{17} + 9.421 s^{16} + 0.2191 s^{15} + 9.446 s^{14} \\ & + 0.1948 s^{13} + 5.185 s^{12} + 0.09227 s^{11} + 1.525 s^{10} + 0.02262 s^9 + 0.2168 s^8 \\ & + 0.002547 s^7 + 0.01149 s^6 + 0.0001038 s^5 + 0.0001971 s^4 + 1.088e-06 s^3 \\ & + 1.503e-09 s^2 + 5.286e-22 s + 7.349e-24 \end{aligned}$$

Code Matlab utilisé

Code principal

```
% INITIALISATION
%-----

%Initialisation des constantes
L = 8 ; %Longueur du canal considere
g = 9.81 ; %constante de gravite
I = 2*10^(-3) ; % Pente du canal
K = 100 ; % Coefficient de Manning

%Dimension : choix de la discretisation
```

```

n = 10;
delta = L/n ;

%Valeurs equilibre
Qeq = 4.1*10^(-3) ; %Debit a l'equilibre
Heq = 0.9*10^(-1); %Hauteur a l'equilibre

Req = Heq/(1+2*Heq); % Calcul du rayon hydraulique a l'equilibre
Jeq = (Qeq^2)/(K^2*Heq^2*Req^(4/3)); % Calcul de la formule de Manning a l'equilibre

%Creation du vecteur d'etat initial : etat valable pr tt x en t=0
X0=zeros(2*n,1) ; % Vecteur pour H et Q initiaux
Hin = 0.4*10^(-1);
Qin = 1.8*10^(-3);
X0(1:n,1) = 0.4*10^(-1); % Vecteur de base H et Q
X0(n+1:2*n,1) = 1.8*10^(-3);
x0(1:n,1) = X0(1:n,1) - Heq ; % Vecteur linearise : h et q !!!
x0(n+1:2*n,1) = X0(n+1:2*n,1) - Qeq;

% MISE EN PLACE DU SYSTEME x' = Ax
%-----
A1 = zeros(n,n) ;
A2 = eye(n,n);
A3 = g*Heq-(Qeq^2)/(Heq^2).*eye(n,n);
A4 = 2*Qeq/Heq.*eye(n,n) ;
A = [A1 A2 ; A3 A4] ;
G3 = g*(1+Jeq-(4/3)*Jeq/(Req*Heq)).*eye(n,n);
G4 = -2*g*Heq*Jeq/Qeq.*eye(n,n);
G = [A1 A1 ; G3 G4] ;
D1=zeros(n,n) ;
for i=1:n
    for j=1:n
        if(i==j)
            if(i>1)&&(i<n)
                D1(i,j-1) = -1 ;
                D1(i,j+1) = 1 ;
            end
        end
    end
end
end
end

```



```

D1(1,1) = -2;
D1(1,2) = 2;
D1(n,n) = 2;
D1(n,n-1) = -2;
D = (1/(2*delta))*[D1 A1 ; A1 D1] ;
Asys = G-A*D ;

Bsys =zeros(2*n,2);
Bsys(n,1)=1;
Bsys(n+1,2)=1;

Csys = zeros(2,2*n);
Csys(1,1) = 1;
Csys(2,2*n) = 1;

Dsys=0;

sys=ss(Asys,Bsys,Csys,Dsys) ;

%FONCTION DE TRANSFERT
%-----
FT=tf(sys);
numFT=FT.num{2}; % Numerateur
denFT=FT.den{1}; % Denominateur
roots(denFT)

%MATRICE DE CONTROLABILITE
%-----
matcont = ctrb(sys) ;
rgcont = rank(matcont)

%MATRICE D'OBSERVABILITE
%-----
matobs = obsv(sys);
rgobs = rank(matobs)

%VALEURS PROPRES DE Asys
%-----
vel = eig(Asys) ;

```

```

nbre=0; % Calcul du nbre de vp negatives
for i=1:2*n
    if (vel(i)<0)
        nbre=nbre+1;
    end
end

%TRAJECTOIRE D'ETAT : BOUCLE OUVERTE
%-----
iter = 150 ; % Intervalle de temps
pas = 1 ; % Choix du pas pour l'intervalle de temps

trajectoire(x0,Asys,iter,n,pas,L) ; % Appel a la fonction trajectoire
figure
%REPONSE INDICIELLE
%-----
step(sys,0:pas:iter);
ylabel('Sortie')
xlabel('Temps')
figure
    % REPONSE IMPULSIONNELLE
%-----
impulse(sys,0:pas:iter)
ylabel('Sortie')
xlabel('Temps')
figure

%CONTROLE EN FEEDBACK D'ETAT REEL
%-----
% p = eig(Asys)-0.05 ; % Diminutions des vp
% K = place(Asys,Bsys,p) ; % Calcul de K
% K = -K ;
Qu=zeros(2*n,2*n);
for i=1:2*n
    for j=1:2*n
        if (i==j)
            Qu(i,j)=.001;
        end
    end
end
end

```

```

Ru = [0.0001 0 ; 0 0.1];
[K,Sol,err] = lqr(Asys,Bsys,Qu,Ru) ;
K=-K;
eig(Asys+Bsys*K)

ABK = Asys+Bsys*K ; % Calcul de A+BK

% %Calcul du controle u + dessin de celui ci
% i=1;
% for t = 0 : pas : iter
%     temp = K*expm(ABK*t)*x0 ;
%     u1(i) = temp(1);
%     u2(i) = temp(2);
%     i = i+1 ;
% end
%
% t = 0:pas:iter;
% subplot(2,1,1)
% plot(t,u1)
% xlabel('temps')
% ylabel('derivee %t de la hauteur a la fin du canal')
% subplot(2,1,2)
% plot(t,u2)
% xlabel('temps')
% ylabel('derivee %t du debit au debut du canal')
% figure

% TRAJECTOIRES EN BOUCLE FERMEE
%-----
trajectoire(x0,ABK,iter,n,pas,L) ;
figure

%ESTIMATEUR ETAT
%-----
p2 = eig(Asys)-0.55 ;
Li = place(Asys',Csys',p2) ;
Li = Li' ;
Li = -Li ; % Matrice d'injection de sortie

ALC = Asys + Li*Csys ; % Matrice decrivant la dynamique d'erreur

```

```

erreur(x0,ALC,pas,iter,n,L) % Dessin de l'erreur
figure

%CONCEPTION ESTIMATEUR DYNAMIQUE
%-----
Acl = [ ABK -Bsys*K ; zeros(2*n,2*n) ALC ] ;
Bcl = [ Bsys ; zeros(2*n,2) ] ;
Ccl = [ Csys zeros(2,2*n) ] ;
syscl = ss(Acl,Bcl,Ccl,0) ;

e0 = 0.1*x0 ;
x0cl = [x0 ; e0] ;

trajectoire(x0cl,Acl,iter,n,pas,L) ;
figure
%Calcul du controle u + dessin de celui ci
i=1;
for t = 0 : pas : iter
    temp = K*expm(ABK*t)*x0 - K*expm(ALC*t)*e0 ;
    u1(i) = temp(1);
    u2(i) = temp(2);
    i = i+1 ;
end
t = 0:pas:iter;
subplot(2,1,1)
plot(t,u1)
xlabel('temps')
ylabel('u1')
title('Graphes des composantes de u(t) en fonction du temps')
subplot(2,1,2)
plot(t,u2)
xlabel('temps')
ylabel('u2')
figure
%COMPARAISON ETAT REEL ET ESTIME
trajectoirecl(x0,x0cl,ABK,Acl,iter,n,pas,L) ;

    Fonction "trajectoire.m"

% Trace la trajectoire d'etat pour un etat initial x0 donne

```

```

% et une matrice A donnee
% 'iter' est l'intervalle de temps considere et 'pas' est le pas avec
% lequel on avance
% n est la discretisation choisie pour l'espace
% L est la longueur du canal
function trajectoire(x0,A,iter,n,pas,L)

i=1;
for t=0:pas:iter
    temp = expm(A*t)*x0 ;
    for j=1:n;
        H(j,i)=temp(j) ;
        Q(j,i)=temp(n+j);
    end
    i=i+1;
end

%Grille de discrétisation : temps et espace
[X,Y] = meshgrid(0:pas:iter , 0:L/(n-1):L) ;

surf(X,Y,H)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Hauteur en variables lineaires')

figure

surf(X,Y,Q)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Debit en variables lineaires')

Fonction "trajectoirecl.m"

% Fonction pour calculer les trajectoires d'etat pour un etat reel
% et un etat estime
% ABK est la matrice A+BK
% Acl est la matrice deifnie pour un estimateur dynamique d'etat
function trajectoirecl(x0,x0cl,ABK,Acl,iter,n,pas,L)

```

```

% Trajectoire etat reel
i=1;
for t=0:pas:iter
    temp = expm(ABK*t)*x0 ;
    for j=1:n;
        Hr(j,i)=temp(j) ;
        Qr(j,i)=temp(n+j);
    end
    i=i+1;
end

% Trajectoire etat estime
i=1;
for t=0:pas:iter
    temp = expm(Acl*t)*x0cl ;
    for j=1:n;
        Hcl(j,i)=temp(j) ;
        Qcl(j,i)=temp(n+j);
    end
    i=i+1;
end

[X,Y] = meshgrid(0:pas:iter , 0:L/(n-1):L) ;
% Dessin
surf(X,Y,Hcl)
hold on
surf(X,Y,Hr)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Hauteur en variables lineaires')
legend('Etat estime','Etat reel')

figure

surf(X,Y,Qcl)
hold on
surf(X,Y,Qr)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Debit en variables lineaires')

```

```

legend('Etat estime','Etat reel')

figure
subplot(4,1,1)
plot(t,Hcl(1,:))
hold on
plot(t,Hr(1:),'r')
xlabel('Temps') ;
ylabel('h')
title('Hauteur (en var. lineaires) au début du canal')
legend('Etat estime','Etat reel')

subplot(4,1,2)
plot(t,Hcl(n,:))
hold on
plot(t,Hr(n:),'r')
xlabel('Temps') ;
ylabel('h')
title('Hauteur (en var. lineaires) a la fin du canal')
legend('Etat estime','Etat reel')

subplot(4,1,3)
plot(t,Qcl(1,:))
hold on
plot(t,Qr(1:),'r')
xlabel('Temps') ;
ylabel('q')
title('Debit(en var. lineaires) au début du canal')
legend('Etat estime','Etat reel')

subplot(4,1,4)
plot(t,Qcl(n,:))
hold on
plot(t,Qr(n:),'r')
xlabel('Temps') ;
ylabel('q')
title('Debit(en var. lineaires) a la fin du canal')
legend('Etat estime','Etat reel')

```

Fonction "erreur.m"

```

function erreur(x0,ALC,pas,iter,n,L)

e0 = 0.10*x0 ; % Choix du % d'erreur ici 10%
i = 1 ;
for t = 0 : pas : iter
    temp = expm(ALC*t)*e0 ;
    for j=1:n;
        eH(j,i)=temp(j) ;
        eQ(j,i)=temp(n+j);
    end
    i=i+1;
end
% Dessin de l'erreur en 3D
[X,Y] = meshgrid(0:pas:iter , 0:L/(n-1):L) ;
surf(X,Y,eH)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Erreur Hauteur en variables lineaires')

figure

surf(X,Y,eQ)
xlabel('Temps') ;
ylabel('Longueur canal')
zlabel('Erreur Debit en variables lineaires')

```


Références

- [1] Valérie Dos Santos Martins, Christophe Prieur, *Boudary Control Of Open Channels with Numerical and Experimental Validations*, IEEE Transactions on Control Systems Technology.
- [2] Xavier Litrico, Vincent Fromion, *Modeling and Control of Hydrostystems*, Springer-Verlag, London, 2008.
- [3] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*, Oxford University Press, 1978.
- [4] Christophe Prieur, Joseph Winkin, Georges bastin, *Robust boundary control of system of conservation laws*, Math.Control Signals Syst., 20, 2008, 173-197.
- [5] Hicham Ouarit, Laurent Lefevre, Didier Georges, *Robust Optimal Control of One-reach Open-channels*, Grenoble.
- [6] J. Winkin, *Systèmes, Contrôle et Optimisation*, Année académique 2009-2010, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur.